UPJV UFR des SCIENCES

Licence STS 3ème Année
Informatique
Aide à la Détection d'Erreurs

Corrigé de la feuille de TD n°1

LOGIQUE

1) Donner la table de vérité de $p \longrightarrow q$ (que l'on peut noter aussi $p \Longrightarrow q$). Énoncer la négation de $p \longrightarrow q$. Donner 2 équivalents tautologiques de $p \longrightarrow q$.

Table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Négation : $p \wedge \neg q$
2 équivalents tautologiques : $\neg p \vee q$, $\neg q \longrightarrow \neg p$

2) Montrer (lois de de Morgan) :
a) $\big(\neg(p \wedge q)\big) \equiv \big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$
b) $\big(\neg(p \vee q)\big) \equiv \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$

a) $\big(\neg(p \wedge q)\big) \equiv \big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\big(\neg(p \wedge q)\big) \leftrightarrow \big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

$\big(\neg(p \wedge q)\big) \leftrightarrow \big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$ est donc bien une tautologie.

b) $\big(\neg(p \vee q)\big) \equiv \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$
Connaissant a), il est possible de démontrer b) sans utiliser de table de vérité.
On remplace p et q respectivement par $\neg p$ et $\neg q$ (cf. exo 4, « règle de substitution ») dans a), on obtient alors :

$$\Big(\neg\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)\Big) \equiv \Big(\big(\neg(\neg p)\big) \vee \big(\neg(\neg q)\big)\Big)$$

qui se simplifie (car $\big(\neg(\neg x)\big) \equiv x$) en :

$$\Big(\neg\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)\Big) \equiv (p \vee q)$$

Cette tautologie est tautologiquement équivalente à la tautologie suivante (car $(a \equiv b) \equiv \big((\neg a) \equiv (\neg b)\big)$) :

$$\left(\neg\left(\neg\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)\right)\right) \equiv \big(\neg(p \vee q)\big)$$

qui se simplifie en $\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big) \equiv \big(\neg(p \vee q)\big)$, qui est bien b).

3) Montrer : $\big(p \wedge (p \longrightarrow q)\big) \vDash q$.
On peut utiliser une table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$\big(p \wedge (p \rightarrow q)\big) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$\big(p \wedge (p \longrightarrow q)\big) \longrightarrow q$ est donc bien une tautologie.
On peut aussi utiliser la règle de remplacement (cf. exo 4) pour éliminer les $\longrightarrow$ et procéder alors à des simplifications :

$$\Big(\big(p \wedge (p \longrightarrow q)\big) \longrightarrow q\Big) \equiv \Big(\big(p \wedge (\neg p \vee q)\big) \longrightarrow q\Big) \equiv \left(\left(\underbrace{(p \wedge \neg p)}_{\mathrm{F}} \vee (p \wedge q)\right) \longrightarrow q\right)$$

$$\equiv \big((p \wedge q) \longrightarrow q\big) \equiv (\neg(p \wedge q) \vee q) \equiv_{\text{de Morgan}} \big((\neg p \vee \neg q) \vee q\big) \equiv \left(\neg p \vee \underbrace{(\neg q \vee q)}_{V}\right) \equiv \mathrm{V}$$

4) Règle de substitution : « substituer la même formule à toutes les occurrences de la même lettre dans une tautologie donne une tautologie ».

En utilisant cette règle, démontrer la tautologie suivante :

$$\big((p \longrightarrow q) \wedge q\big) \equiv \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$

Règle de remplacement : « Soit F une formule et A une sous-formule de F. Si $A \equiv B$, alors le remplacement de A par B dans F donne une formule F' tautologiquement équivalente à F ».

En utilisant cette règle, démontrer que les 2 formules suivantes sont tautologiquement équivalentes, en déduire que la seconde formule est une tautologie :

$$\big((p \longrightarrow q) \wedge q\big) \leftrightarrow \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$
$$\Big(\big(\neg\big(p \wedge (\neg q)\big)\big) \wedge q\Big) \leftrightarrow \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$

Règle de substitution : on sait que $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (commutativité de $\equiv$). Il suffit donc de substituer $(p \longrightarrow q)$ à p et on obtient $\big((p \longrightarrow q) \wedge q\big) \equiv \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$ qui est bien la tautologie attendue.

Règle de remplacement : on sait que $p \wedge (\neg q)$ est la négation de $p \longrightarrow q$. Donc on a la tautologie suivante : $\big(\neg\big(p \wedge (\neg q)\big)\big) \equiv (p \longrightarrow q)$. On peut donc remplacer $(p \longrightarrow q)$ par $\big(\neg\big(p \wedge (\neg q)\big)\big)$ dans le membre gauche de la première équivalence et on obtient la seconde équivalence :

$$\Big(\big(\neg\big(p \wedge (\neg q)\big)\big) \wedge q\Big) \leftrightarrow \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big).$$

Ces deux formules sont donc tautologiquement équivalentes et puisque la première équivalence est une tautologie (cf. exercice sur la règle de substitution), la seconde équivalence est bien une tautologie.

5) Soit S la suite infinie de nombres $s_0, s_1, s_2, \ldots\ s_i \ldots$ où les indices des éléments de la suite sont les entiers naturels. Caractériser le fait que les éléments de la suite S sont en ordre croissant en utilisant une formule de la logique des prédicats. Si possible, donner deux caractérisations.
Faire de même avec T la suite finie de $n+1$ nombres $t_0, t_1, t_2, \ldots\ t_i \ldots t_n$.

Pour S on obtient :

a) $\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})$ ou
b) $\forall (i,j), \Big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\Big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)$.

Pour T on obtient :

a) $\forall i, (\, i \in \mathbb{N} \cap [0, n[) \rightarrow (t_i \leq t_{i+1})$ ou
b) $\forall (i,j), \Big(\big((i,j) \in (\mathbb{N} \cap [0, n])^2\big) \wedge (i < j)\Big) \rightarrow \big(t_i \leq t_j\big)$.