Université de Picardie Jules Verne *Année 2020–2021*

Licence 2 année – Mathématiques – Théorie des nombres

Examen Mai 2021

Toutes les réponses devront être justifiées

Exercice 1.

(1) Calculer $\phi(2021)$.

(2) Résoudre

$$\begin{cases} x \equiv & 5 \quad [7] \\ x \equiv & 7 \quad [11]. \end{cases}$$

(3) Le nombre suivant est-il algébrique : $\frac{\sqrt{1+\sqrt{7}}}{2-\sqrt{2}}$?

Exercice 2. Montrer que l'équation (E) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$ n'a pas de solutions entières. (Regarder les carrés modulo 8)

Exercice 3. On définit la *fonction de Liouville* $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ par

$$\lambda(1) = 1 \text{ and } \lambda(n) = (-1)^{a_1+a_2+\cdots+a_k} \text{où } n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

avec $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres premiers.

(1) Montrer que λ est multiplicative.

(2) Calculer $\lambda(n)$ pour $n \in \{12, 1000, 20!\}$.

(3) Justifier que la fonction f définie par $n \mapsto \sum_{d|n} \lambda(d)$ est multiplicative.

(4) Montrer que $f(p^t) = 0$ si t impair et 1 si t est pair.

(5) Montrer que $f(n) = 1$ si, et seulement si, $n = k^2$ avec $k \geq 1$ entier.

Exercice 4. Rappelons que σ est la fonction définit par $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. On dit qu'un nombre est super-parfait si $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

(1) Montrer que 16 est super-parfait.

(2) Montrer que $n = 2^q$, avec $2^{q+1} - 1$ premier, alors n est super-parfait.

(3) Montrer que $\sigma(rs) \geq rs + r + 1$ pour tout $r, s \geq 2$.

(4) Montrer que si $n = 2^q t$, avec t impair, est super-parfait alors $t = 1$. (On pourra procéder par contradiction et obtenir que $2^{q+1}t > 2^{q+1}(t+1)$).

(5) Montrer que si $n = 2^q$ est super-parfait alors $2^q - 1$ est premier.

(6) Conclure.

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
UFR des sciences
Département de Mathématiques.
L2. Semestre 4 : Calcul Différentiel 1.

Examen du 12 mai 2021
(Session 1, durée 2 heures)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. (06 pts) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Justifier rapidement que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Le problème étant à l'origine, montrer que :

2) f est continue à l'origine.
3) f est différentiable à l'origine.
4) f est-elle de classe C^1 à l'origine ? (*Justifier votre réponse*)

Exercice 2 (04 pts). Trouver le développement limité à l'ordre 3 en $(0,0)$ de la fonction f définie par

$$f(x,y) = (1+x)^y$$

et en déduire toutes les valeurs des dérivées partielles de f d'ordre ≤ 3 en $(0,0)$.

Exercice 3. (04 pts) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 - 6\,x^2 + \frac{y^3}{8} - 6\,y.$$

1) Chercher les points critiques de la fonction f et ses extrema relatifs.
2) La fonction f a-t-elle un extremum (maximum ou minimum) absolu ?

Exercice 4. (06 pts) On considère les deux sous-ensembles

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\} \quad \text{et} \quad V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ v^2 - 4u > 0\}.$$

On note par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = (xy, x+y).$$

On admettra que $V = \varphi(U)$.

1) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

2) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant la condition :

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y-x)f(x,y),$$

et soit $g = f \circ \varphi^{-1}$.

i) Montrer que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur V vérifiant la condition :

$$(**) \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v).$$

ii) Déterminer toutes les fonctions $g : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $(**)$.

iii) En déduire toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $(*)$.

Name :...

UPJV - ANGLAIS

LICENCE 2 - MATHEMATIQUES

Grammar : choose the correct proposition **5 pts**

1) Phil … to be more efficient than his brother.
a) says b) is saying c) is said d) is used

2) I … in the same company since I … college.
a) work / left b) worked / have left
c) have been working / left d) have worked / have left

3) Fiona, …. I met yesterday, is my neighbour's roommate.
a) who b) whom c) whose d) which

4) This is not my report but I think it is … .
a) Mike's b) Mikes' c) Mike d) Mike's one

5) « Do you think they will get the job done in time ? »
« Well, I think... »
a) Ø b) so c) that d) yes

6) It's time we … her the truth.
a) told b) tell c) would tell d) will tell

7) I'd rather you … me before.
a) told b) had told c) have told d) tell

8) Could he tell you what … .
a) the answer is b) is the answer c) was the answer d) the answer was

9) Chris and … are real fans of his work.
a) I b) me c) mine d) us

10) I will be happy when I … done with this test.
a) will be b) am c) am being d) will have

Essay : choose one subject : 250 words (min) **15 pts**

A - The future of education is virtual. Do you agree with the statement ?

B – Is technology humans' best friend or worst enemy ?

Are we liberated by tech – or does it enslave us?

(1) Technology is unruly. New innovations bring with them a host of unintended consequences, ranging from the troubling to the downright depressing. Social media makes us lonely. Too much screen-time makes teenagers fall behind their peers. And at the more feeble end of the spectrum, many of us have walked into an obstacle while texting. Whatever glorious vision animates the moguls of Silicon Valley, it surely can't be this.

(2) We're much better at designing complex systems than we are at predicting their behaviour, argues the writer Edward Tenner. Even though unintended consequences are inevitable, Tenner thinks they can be powerful catalysts for progress. But even the notion of an "intended consequence" is problematic when it comes to tech. Evgeny Morazov points out that we tend to confuse the positive consequences of information technology with intended ones, downplaying the significance of other natural, but rather less noble, upshots like pornography, surveillance and authoritarian control.

(3) Free time is a case in point. Technology makes us more productive, but it's also accused of unreasonably extending the domain of work. So does tech liberate us, or enslave us? And what does it really "intend" to do?

In 1930, the economist John Maynard Keynes predicted that the most pressing concern of the man of the future would be "how to occupy the leisure, which science and compound interest will have won for him." It hasn't quite turned out that way - but Keynes wasn't entirely off the mark. When we consider the lot of the average labourer of the past, our complaints about work-life balance start to sound pretty peevish. And the rise of technology really has, it seems, given us more free time than ever. So why do we still feel harried?

(4) It's worth noting that modern leisure is just as tech-saturated as work. Americans who subscribe to Netflix spend more time on the site than they do eating and having sex combined, TDG research found. The average Briton spends 1 hour 20 minutes every day monitoring four social media accounts, according to research from the Global Web Index. But all this screen-time makes us uneasy. To co-opt David Foster Wallace's description of attitudes to television in the 1990s, there's a "weird hate-need-fear-6-hrs-daily gestalt" about the whole thing.

But technology doesn't just offer us escape. It promises to transfigure our bodies, our minds and our very souls by making us fitter, happier, and more productive - but it does it by insinuating that we're, well, a bit suboptimal as we are. "There's an app for that" comes with a whispered aside: "You know you're doing it wrong, right?"

(5) Criticisms of tech can sound shrill, but it's not antediluvian to notice the impossible desires technology breeds. Our devices present us with simulacra of beautiful, fit, fulfilled people pursuing their dreams and falling in love, and none of them are browsing the web at 11pm on a Saturday night - unlike us. We click and swipe our woebegone way through a vibrant world where nobody who is anybody spends their free time in front of a glowing screen, painfully aware that our only access to that world is through that very glowing screen.

But we're no fools. We know that nothing on the web as it seems. We long to detach ourselves from the whole circus for once and for all - and so we turn once again to the internet to research digital detoxes and vent our tech-related spleen. The web has a way of dancing around us, knowingly and self-referentially and maddeningly deflecting every attempt we make to express our unease.

Name :..

I - Words : find words to match the definition. **4 pts**

- to give a spectrum of classification :...
- important, powerful or influential people :..
- to minimize the impact of an action :...
- a worry :...
- showing irritation or bad mood :..
- being below a standard level :..
- sad and pointless :..
- to release or give off (material or feelings) :...

II - Reading task : choose the appropriate answer. **16 pts**

1) In part (1), it should be understood that technology :
   a) has affected adults more than teenagers.
   b) has improved our lives.
   c) has helped fight against loneliness.
   d) has caused great damage in society.

2) In part (2), according to Edward Tenner :
   a) Technology is a brake to real progress.
   b) There is no progress without technology.
   c) The unintended consequences of information technology may have positive aspects
   d) Unintended consequences may be avoided.

3) In part (2), according to Evgeny Morazov :
   a) Intended consequences are all positive.
   b) Surveillance is part of the positive consequences.
   c) Not all intended consequences are positive.
   d) Authoritarian control is one of the noblest consequences.

4) In part (3), it should be understood that technology :
   a) means no freedom.
   b) will never enslave us.
   c) is very helpful at work.
   d) has definitely increased our freedom.

5) In part (4) , it should be understood that :

a) Leisure is spoiled by technology.
b) Free time is more than ever tech-free.
c) Social networks are becoming more and more attractive.
d) Tech addiction is decreasing.

6) In part (4), it should be understood that :
a) There is no productivity without technology.
b) Technology aims at making us happy.
c) You cannot be happy if you are not fit.
d) Technology has no impact on our body.

7) In part (5), it should be understood that technology :
a) makes our dream come true.
b) helps us fall in love.
c) cannot be criticized.
d) creates a feeling of frustration.

8) In part (5), it should be understood that :
a) The characters shown on the web reflect reality.
b) Virtual life is quite different from reality.
c) You can easily identify with your fictional characters.
d) You should believe what you see on the web.

L2–Licence de Mathématiques

Intégration et Equations différentielles

Épreuve du 06/01/2021

Il en sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.

Exercice 1

Déterminer la nature de

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 dx}{(x^4+1)\sqrt{x}}.$$

Exercice 2

Calculer

$$\int \frac{xe^{\mathrm{Arcsin}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On pourra poser $t = \mathrm{Arcsin}(x)$.

Exercice 3

Montrer que l'intégrale

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(x)}{x^2} dx$$

est convergente et trouver sa valeur.

Problème

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - (x+1)y + e^x(x^2+1) = 0.$$

1. Trouver toutes les solutions de (E).
2. Montrer qu'il existe des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E) pour $x \neq 0$.

Examen du mercredi 6 janvier 2021 - Durée 2h00

L'usage de tout document ou appareil électronique (y compris calculatrice) est prohibé. Les réponses aux questions doivent être justifiées faute de quoi elles ne rapporteront aucun point, même si elles sont justes.

Questions de cours

(a) Montrer que tout sous-ensemble compact d'un espace métrique (E, d) est fermé et borné.

(b) Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Montrer que

$$E \times E' \text{ est compact} \Longleftrightarrow E \text{ et } E' \text{ sont compacts.}$$

Exercice 1. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que d n'est induite par aucune norme.

(c) Expliciter la boule ouverte centrée en 0 de rayon $r > 0$ pour cette distance.

(d) La distance d est-elle topologiquement équivalente à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie A non vide de E, on note

$$\forall x \in E, \quad d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

(a) Montrer que pour tout x, y dans E

$$d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y).$$

En déduire que l'application $x \in E \mapsto d(x, A)$ est continue.

(b) Montrer que $d(x, A) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$.

(c) Soient A et B deux fermés de E. Démontrer que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in E,\ d(x, A) + d(x, B) > 0$.

(d) On suppose dorénavant que A et B sont deux fermés de E disjoints. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ est bien définie et est continue.

(e) En déduire qu'il existe deux ouverts de E disjoints, U_A et U_B, tels que $A \subset U_A$ et $B \subset U_B$.
Indication : on pourra considérer les images réciproque par f de $I =]-\infty, 1/3[$ et $J =]2/3, +\infty[$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance usuelle.
Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont ouvertes ? fermées ? bornées ? compactes ?

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^6 < 3\right\}, \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^6 = 3\right\}, \quad S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique et C une partie de E.

(a) Donner 4 propriétés équivalentes qui caractérisent le fait que C est une partie connexe de E.

(b) Montrer que si C est une partie connexe de E alors son adhérence $\overline{C}$ l'est également.

(c) On suppose que A et B sont deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est une partie connexe de E.

Université de Picardie Jules Verne
Licence 2 mathématiques
Année 2020-2021

Théorie des ensembles.

Examen du mardi 5 janvier 2021 - Durée 2h00

L'usage de tout document ou appareil électronique (y compris calculatrice) est prohibé. Les réponses aux questions doivent être justifiées faute de quoi elles ne rapporteront aucun point, même si elles sont justes.

Exercice 1.

(a) Dénombrer les anagrammes du mot JANVIER.

(b) Dénombrer les anagrammes du mot ANAGRAMME.

(c) 9 couples et 14 personnes non mariées se rencontrent pendant une soirée. Au début de la soirée, chaque participant serre la main des autres participants, sauf qu'il n'y a pas de poignée de main entre conjoints. Combien de poignées de main ont eu lieu au total ?

Exercice 2. On appelle *dérangement* d'un ensemble E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments, avec la convention $D_0 = 1$.

(a) Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? Donner D_1 et D_2.

(b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

(c) En déduire D_3, D_4 et D_5.

(d) Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. A l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes, on numérote les femmes de 1 à 5, et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse.
Combien y-a-t-il d'associations possibles ?
Combien y-a-t-il d'associations telles qu'aucun couple légitime n'est reconstitué ?
Combien y-a-t-il d'associations telles qu'un seul couple légitime est reconstitué ?
Combien y-a-t-il d'associations telles qu'il y a plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes ?

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? finis ?

(a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, où $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

(b) l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Existe-t-il une surjection $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$? Si oui, une telle surjection peut-elle être injective ?

Exercice 4.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $x \in]a, b[$, on pose $\delta(x) := \lim_{y \to x+} f(y) - \lim_{y \to x-} f(y)$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'ensemble $E_n = \{x \in]a, b[\; | \delta(x) > 1/n\}$ a au plus $n\,(f(b) - f(a))$ éléments.

(b) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. (x est un point de discontinuité de f ssi $\delta(x) \neq 0$).

(c) Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur $\mathbb{R}$.

Tourner la page

Exercice 5.

(a) Expliquer pourquoi il existe une bijection $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(b) On suppose que φ est une telle bijection et on note $\varphi(t) = (u(t), v(t))$. Montrer que $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective.

(c) Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par v.

(d) Prouver que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid v(t) = 0\}$ est indénombrable.