

Algorithmique des Graphes

TD 6

Propositions de Solutions

Alain Cournier

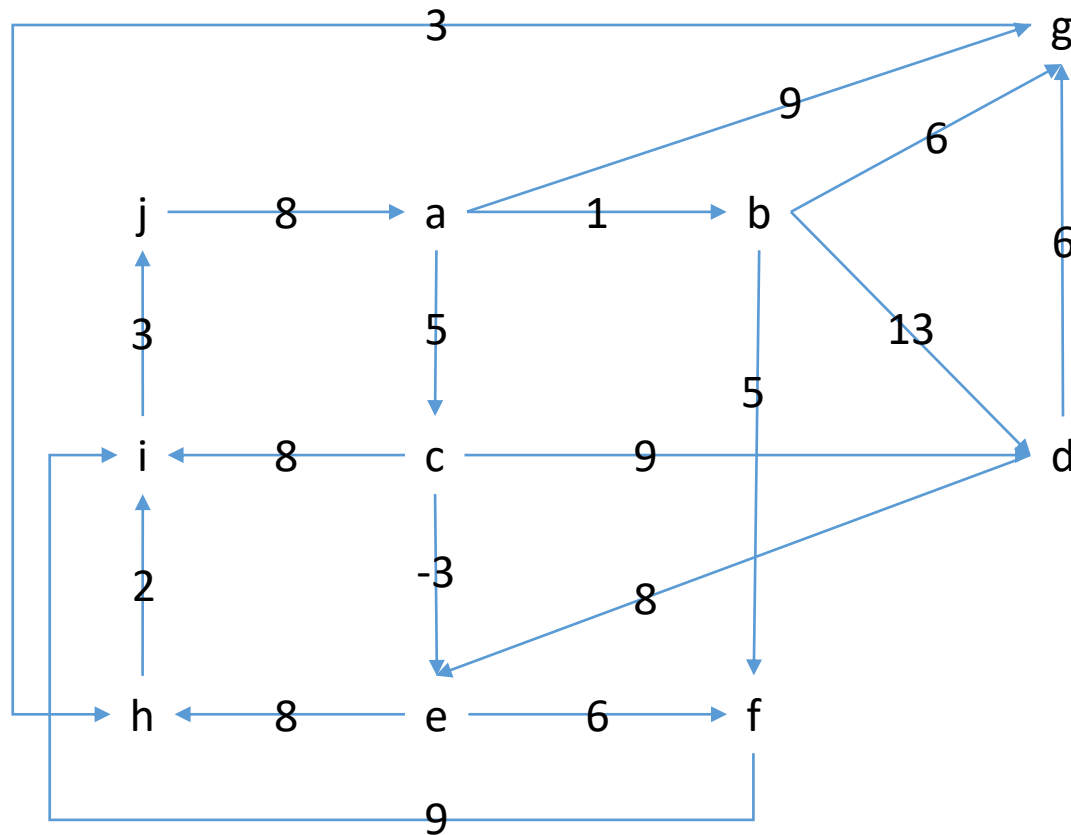


Exercice 1

- Les principes des deux algorithmes sont décrits dans le cours.



Exercice 2 : Le graphe



La Matrice M

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	∞	∞	∞	9	∞	∞	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	∞	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0



La Matrice $M^2 = \text{OpMat}(M, M)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	∞	13	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	9	14	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	15	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	9	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	10	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	12
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	5	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	5
i	11	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	∞	∞	∞	17	∞	∞	0



La Matrice $M^4 = \text{OpMat}(M^2, M^2)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	16
b	∞	0	∞	13	21	5	6	9	11	17
c	19	∞	0	9	-3	3	15	5	7	11
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	9	11	14
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	10	13
f	20	21	25	∞	∞	0	29	∞	9	12
g	16	17	21	∞	∞	∞	0	3	5	8
h	13	14	18	∞	∞	∞	22	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



La Matrice $M^8 = \text{OpMat}(M^4, M^4)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



La Matrice $M^{16} = \text{OpMat}(M^8, M^8)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



La Matrice M

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	∞	∞	∞	9	∞	∞	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	∞	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0



Floyd Warshall Etape 1 utilise a

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	∞	∞	∞	9	∞	∞	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	∞	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	∞	∞	∞	17	∞	∞	0



Floyd Warshall Etape 2 utilise b

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	∞	6	7	∞	∞	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	∞	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	∞	14	15	∞	∞	0



Floyd Warshall Etape 3 utilise c

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	∞	13	∞
b	∞	0	∞	13	∞	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	∞	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	∞	21	0



Floyd Warshall Etape 4 utilise d

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	∞	13	∞
b	∞	0	∞	13	21	5	6	∞	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	∞	15	∞	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	∞	6	∞	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	∞	21	0



Floyd Warshall Etape 5 utilise e

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	∞
b	∞	0	∞	13	21	5	6	29	∞	∞
c	∞	∞	0	9	-3	3	15	5	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	16	∞	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	∞	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



Floyd Warshall Etape 6 utilise f

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	∞
b	∞	0	∞	13	21	5	6	29	14	∞
c	∞	∞	0	9	-3	3	15	5	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	16	23	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	15	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



Floyd Warshall Etape 7 utilise g

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	∞
b	∞	0	∞	13	21	5	6	9	14	∞
c	∞	∞	0	9	-3	3	15	5	8	∞
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	9	23	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	15	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	∞	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



Floyd Warshall Etape 8 utilise h

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	∞
b	∞	0	∞	13	21	5	6	9	11	∞
c	∞	∞	0	9	-3	3	15	5	7	∞
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	9	11	∞
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	10	∞
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	∞
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	5	∞
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	∞
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



Floyd Warshall Etape 9 utilise i

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	∞	0	∞	13	21	5	6	9	11	14
c	∞	∞	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	∞	∞	∞	0	8	14	6	9	11	14
e	∞	∞	∞	∞	0	6	∞	8	10	13
f	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	9	12
g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3	5	8
h	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	2	5
i	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



Floyd Warshall Etape 10 utilise j

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



Exercice 3

- On souhaite détecter les circuits de poids négatifs :
- Soit $\mu = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_1$ un circuit de poids strictement négatif alors il existe un chemin de poids strictement négatif de x_1 à x_1 de longueur au plus n (nb de sommets).
- Les chemins d'un sommet à lui-même sont calculés sur la diagonale de la matrice ($M[i,i]$)



Exercice 3 Idée d'un algorithme

- Utiliser OpMat pour calculer M^t avec $t \geq n$.
- Parcourir la diagonale de M^t :
 - Il existe un circuit de poids négatif si et seulement si il existe un indice y tel que $M^t[y,y] < 0$
- Complexité : $O(n^3 \text{ Log } n)$

