

# Algorithmique des Graphes

## TD 6

Propositions de Solutions

Alain Cournier

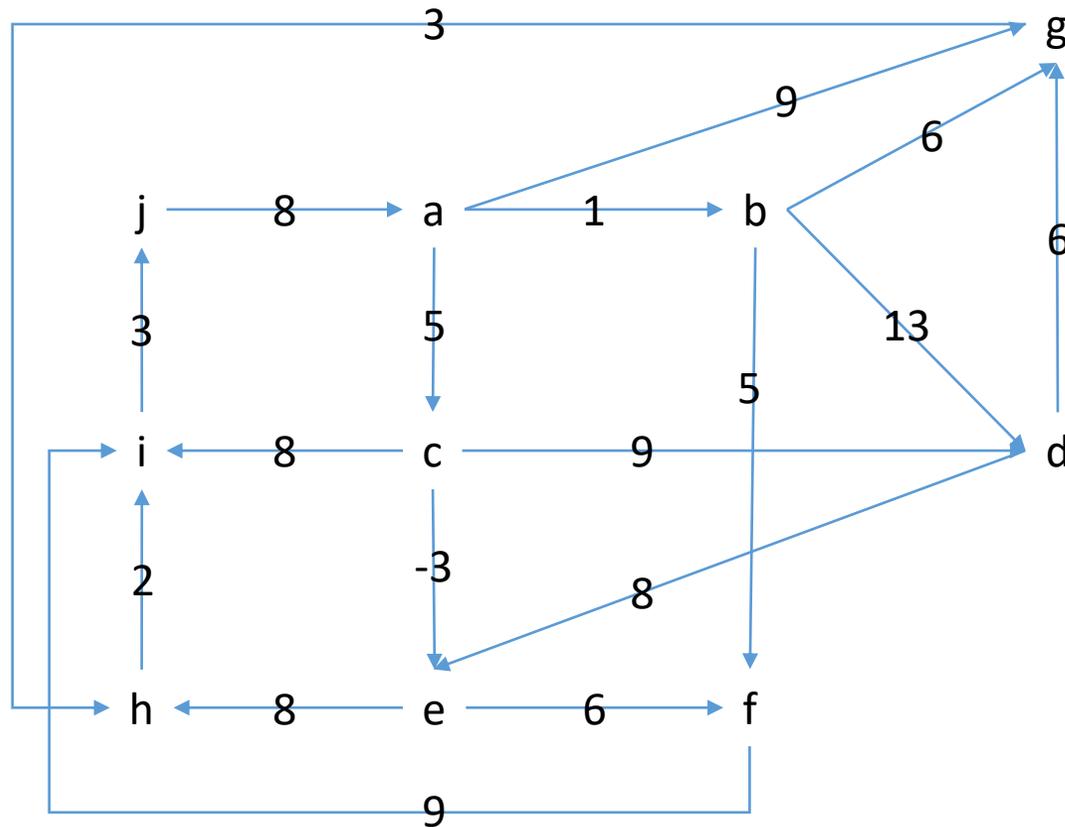


# Exercice 1

- Les principes des deux algorithmes sont décrits dans le cours.



# Exercice 2 : Le graphe



# La Matrice M

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	$\infty$	0							



La Matrice  $M^2 = \text{OpMat}(M, M)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	$\infty$	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	9	14	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	15	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	9	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	10	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	12
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	5	$\infty$
h	$\infty$	0	2	5						
i	11	$\infty$	0	3						
j	8	9	13	$\infty$	$\infty$	$\infty$	17	$\infty$	$\infty$	0



La Matrice  $M^4 = \text{OpMat}(M^2, M^2)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	16
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	9	11	17
c	19	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	7	11
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	9	11	14
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	10	13
f	20	21	25	$\infty$	$\infty$	0	29	$\infty$	9	12
g	16	17	21	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	5	8
h	13	14	18	$\infty$	$\infty$	$\infty$	22	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



La Matrice  $M^8 = \text{OpMat}(M^4, M^4)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



La Matrice  $M^{16} = \text{OpMat}(M^8, M^8)$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



# La Matrice M

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	$\infty$	0							



# Floyd Warshall Etape 1 utilise a

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	$\infty$	$\infty$	$\infty$	17	$\infty$	$\infty$	0



# Floyd Warshall Etape 2 utilise b

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	$\infty$	6	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	$\infty$	14	15	$\infty$	$\infty$	0



# Floyd Warshall Etape 3 utilise c

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	$\infty$	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	$\infty$	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	$\infty$	21	0



# Floyd Warshall Etape 4 utilise d

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	$\infty$	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	$\infty$	15	$\infty$	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	$\infty$	21	0



# Floyd Warshall Etape 5 utilise e

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	29	$\infty$	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	16	$\infty$	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	$\infty$	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



# Floyd Warshall Etape 6 utilise f

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	29	14	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	16	23	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	15	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



# Floyd Warshall Etape 7 utilise g

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	13	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	9	14	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	8	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	9	23	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	15	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	$\infty$	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	18	21	0



# Floyd Warshall Etape 8 utilise h

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	$\infty$
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	9	11	$\infty$
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	7	$\infty$
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	9	11	$\infty$
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	10	$\infty$
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	5	$\infty$
h	$\infty$	0	2	$\infty$						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



# Floyd Warshall Etape 9 utilise i

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	$\infty$	0	$\infty$	13	21	5	6	9	11	14
c	$\infty$	$\infty$	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	8	14	6	9	11	14
e	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	6	$\infty$	8	10	13
f	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	9	12
g	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3	5	8
h	$\infty$	0	2	5						
i	$\infty$	0	3							
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



# Floyd Warshall Etape 10 utilise j

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	5	14	2	6	7	10	12	15
b	22	0	27	13	21	5	6	9	11	14
c	18	19	0	9	-3	3	15	5	7	10
d	22	23	27	0	8	14	6	9	11	14
e	21	22	26	35	0	6	28	8	10	13
f	20	21	25	34	22	0	27	30	9	12
g	16	17	21	30	18	22	0	3	5	8
h	13	14	18	27	15	19	20	0	2	5
i	11	12	16	25	13	17	18	21	0	3
j	8	9	13	22	10	14	15	18	20	0



# Exercice 3

- On souhaite détecter les circuits de poids négatifs :
- Soit  $\mu = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_1$  un circuit de poids strictement négatif alors il existe un chemin de poids strictement négatif de  $x_1$  à  $x_1$  de longueur au plus  $n$  (nb de sommets).
- Les chemins d'un sommet à lui-même sont calculés sur la diagonale de la matrice ( $M[i,i]$ )



# Exercice 3 Idée d'un algorithme

- Utiliser OpMat pour calculer  $M^t$  avec  $t \geq n$ .
- Parcourir la diagonale de  $M^t$  :
  - Il existe un circuit de poids négatif si et seulement si il existe un indice  $y$  tel que  $M^t[y,y] < 0$
- Complexité :  $O(n^3 \text{ Log } n)$

