

TD sur les flots

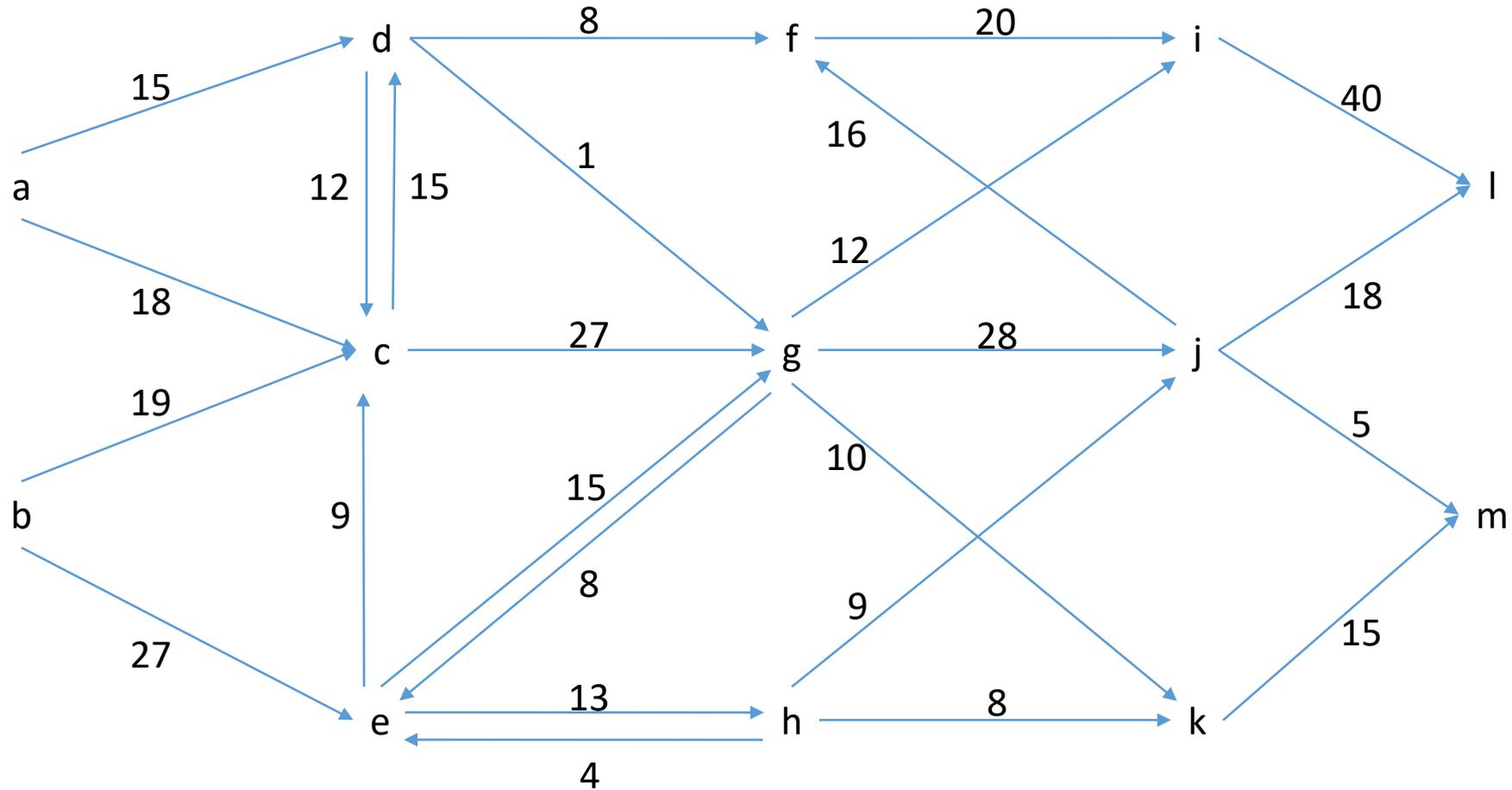
Propositions de solutions

Alain Cournier

Licence Informatique UPJV



Exercice 1 : Le graphe

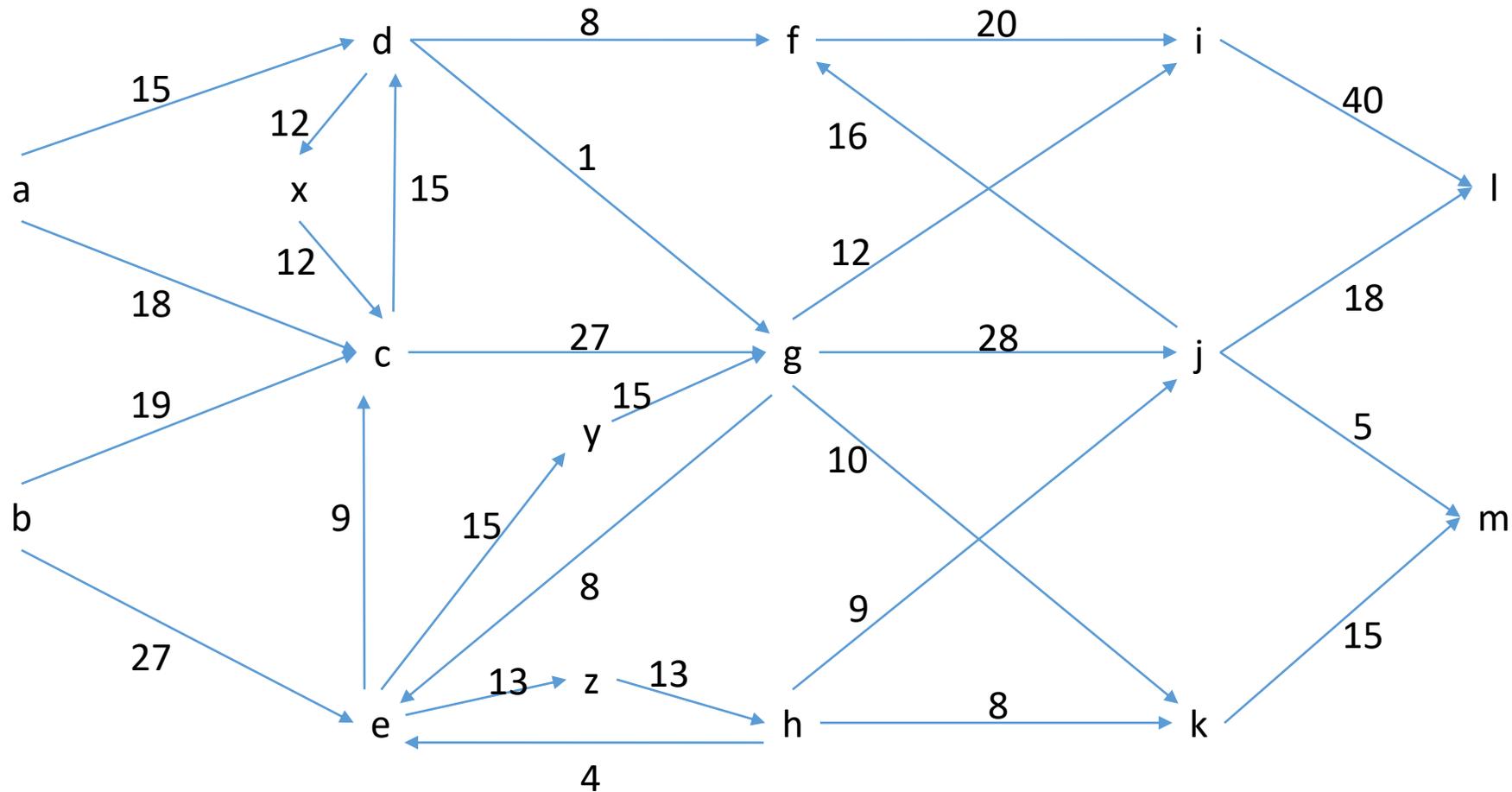


Exercice 1 Etape 1 : Le graphe antisymétrique

- Les arcs (d, c) , (e, g) et (e, h) empêche le graphe d'être antisymétrique
- Nous allons donc ajouter 3 sommets x , y et z :
 - (d, c) est remplacé par les deux arcs de poids 12 (d, x) et (x, c)
 - (e, g) est remplacé par les deux arcs de poids 15 (e, y) et (y, g)
 - (e, h) est remplacé par les deux arcs de poids 13 (e, z) et (z, h)



Exercice 1 : Le graphe antisymétrique



Exercice 1 Etape 2 : Puits/sources

- Nous avons deux sources (a et b) et deux puits (l et m). On peut faire les remarques suivantes :
 - La somme des capacités des arcs sortants de a est 33
 - La somme des capacités des arcs sortants de b est 46
 - La somme des capacités des arcs entrants de l est 58
 - La somme des capacités des arcs entrants de m est 20

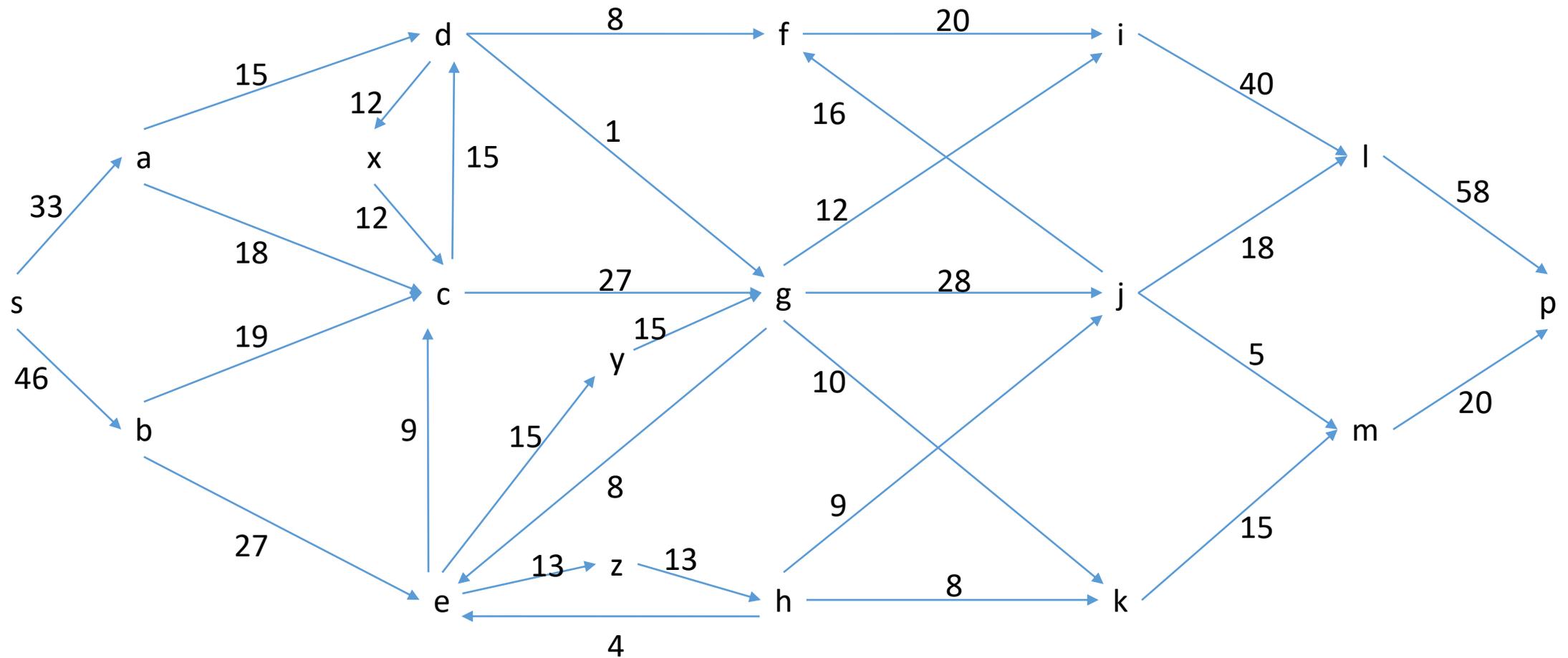


Exercice 1 Etape 2 : Puits/sources

- Nous allons donc ajouter deux sommets s et p :
 - Créer l'arc (s, a) de capacité 33
 - Créer l'arc (s, b) de capacité 46
 - Créer l'arc (l, p) de capacité 58
 - Créer l'arc (m, p) de capacité 20
- Nous chercherons ensuite le flot maximal entre s et p qui correspondra exactement au flot maximal entre les deux sources (a et b) et les deux puits (l et m).



Exercice 1 : Le graphe transformé

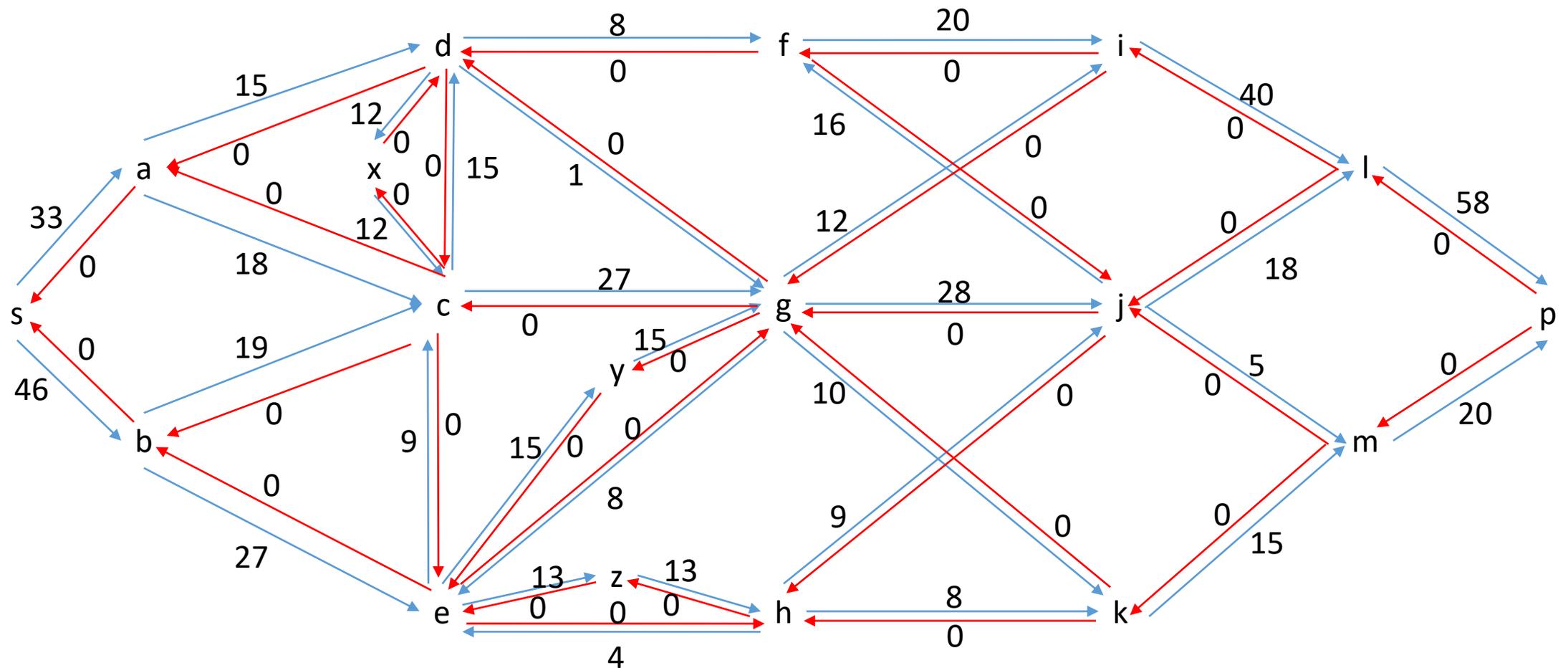


Exercice 1 Etape 3 : Réseau résiduel

- Nous allons maintenant rendre le graphe symétrique en ajoutant des arcs de capacités nulles (en rouge)



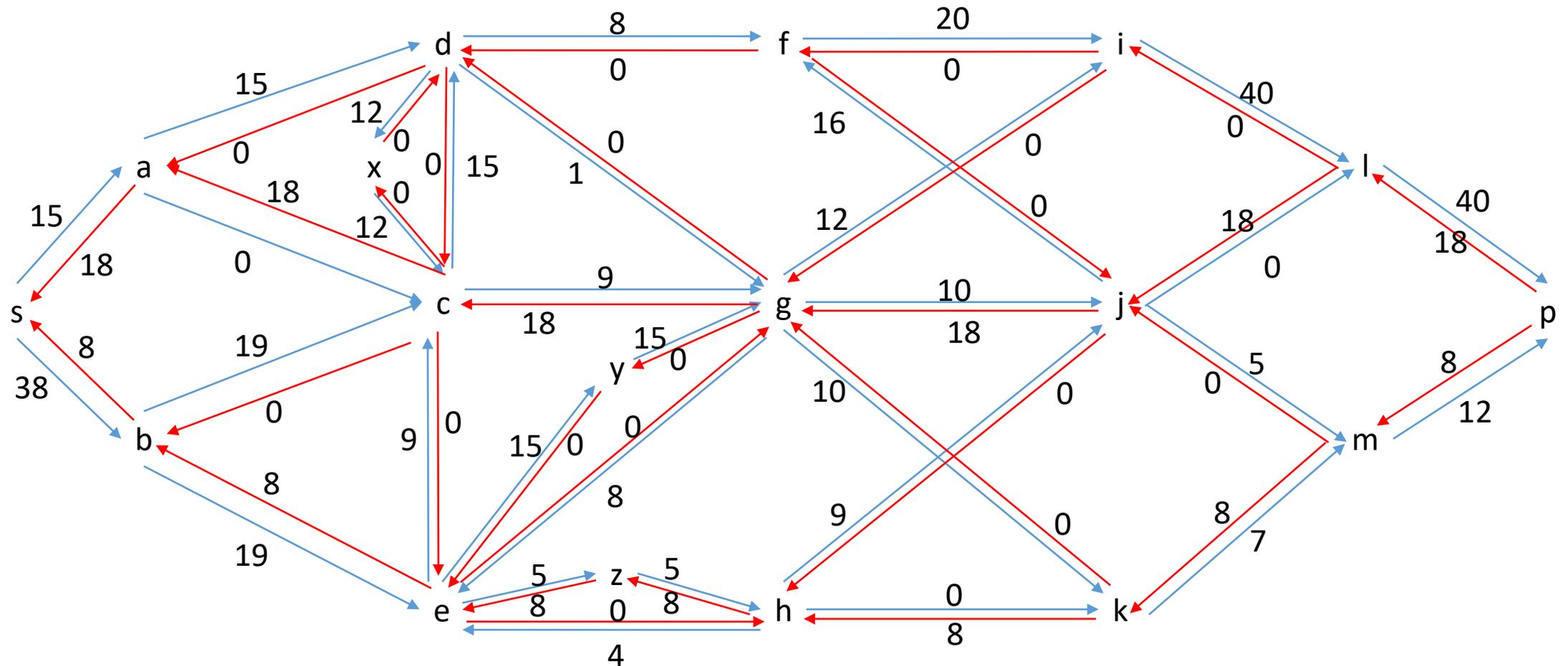
Exercice 1 : Réseau résiduel initial



Exercice 2 : Calcul du flot maximal

- Nous cherchons un chemin de s à p : sacgjp capacité 18
- Nous devons calculer le réseau résiduel
- Nous cherchons un nouveau chemin de s à p : sbezhkmp capacité 8
- Nous devons calculer le réseau résiduel

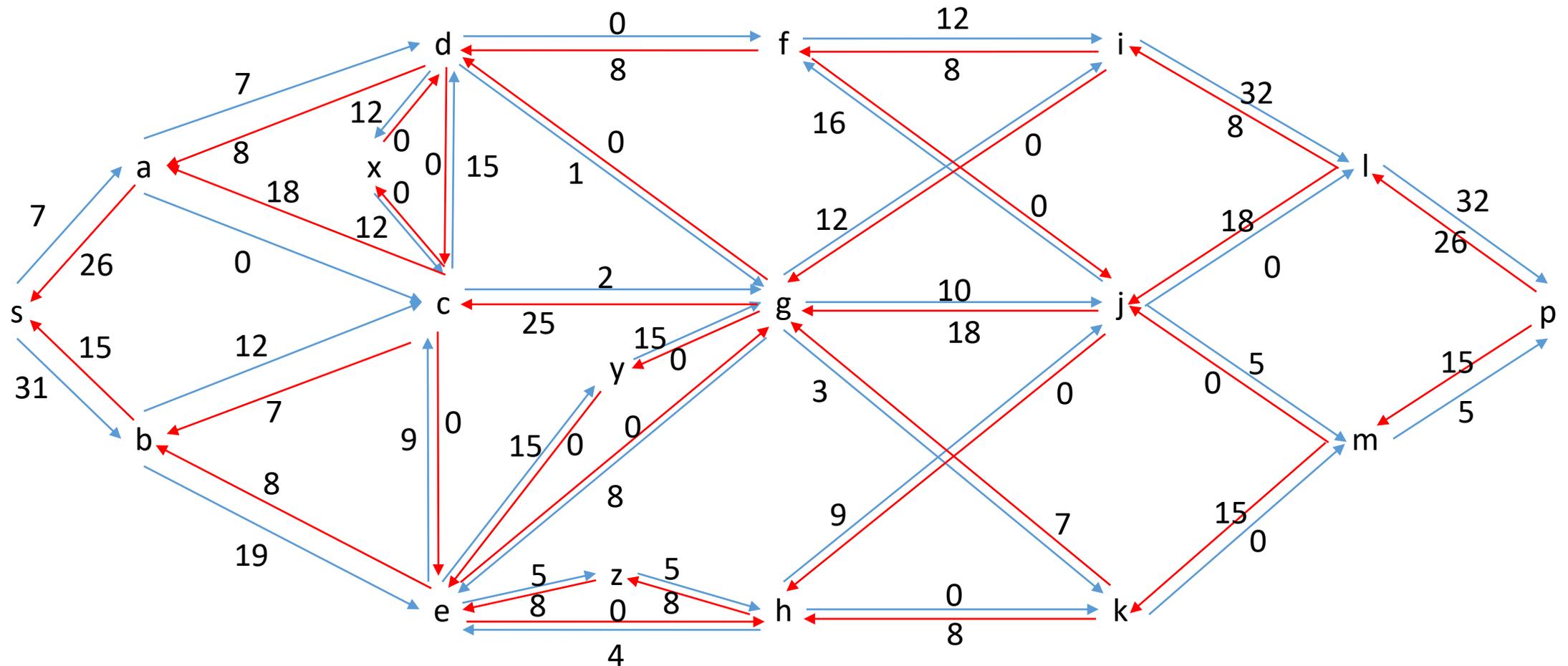
Exercice 2 : Réseau résiduel



Exercice 2 : Clacul du flot maximal

- Nous cherchons un chemin de s à p : sadfilp capacité 8
- Nous devons calculer le réseau résiduel
- Nous cherchons un nouveau chemin de s à p : sbcgkmp capacité 7
- Nous devons calculer le réseau résiduel

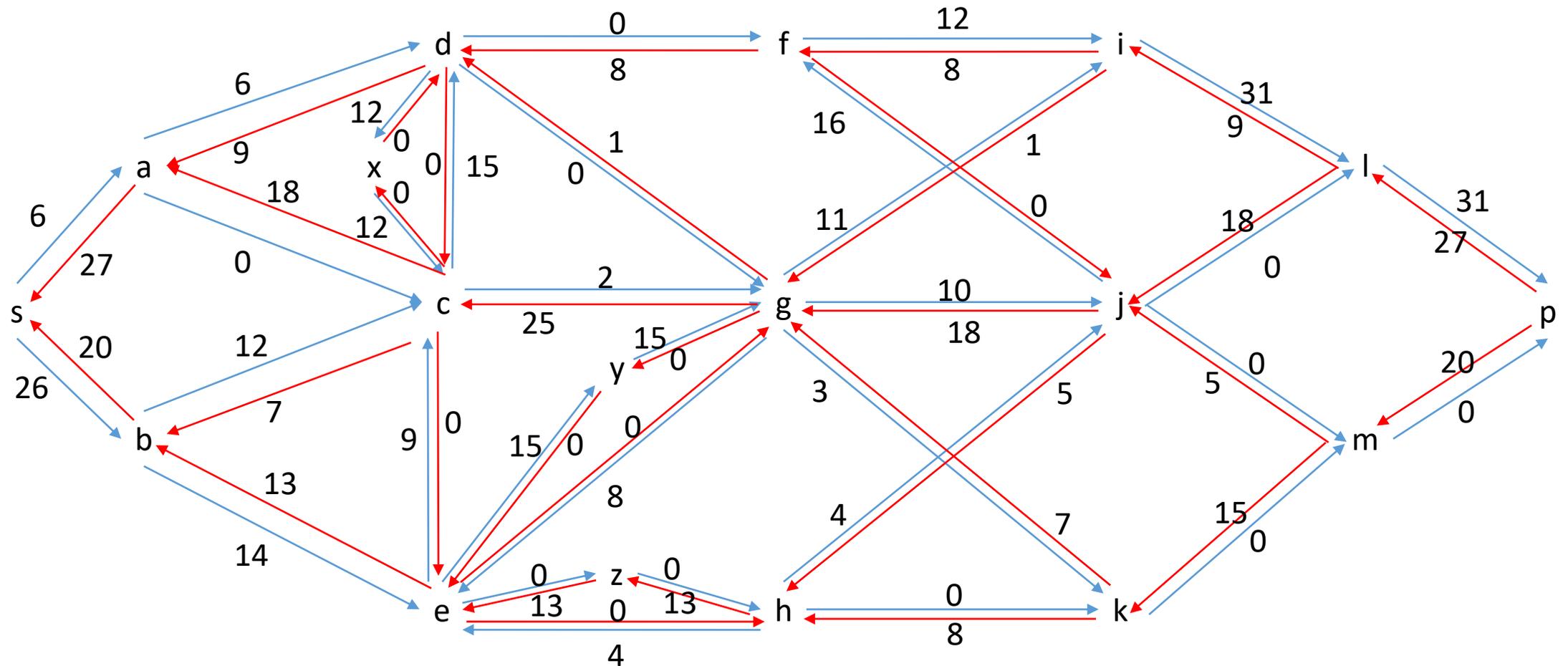
Exercice 2 : Réseau résiduel



Exercice 2 : Calcul du flot maximal

- Nous cherchons un chemin de s à p : sbezghjmp capacité 5
- Nous devons calculer le réseau résiduel
- Nous cherchons un chemin de s à p : sadgilp capacité 1
- Nous devons calculer le réseau résiduel

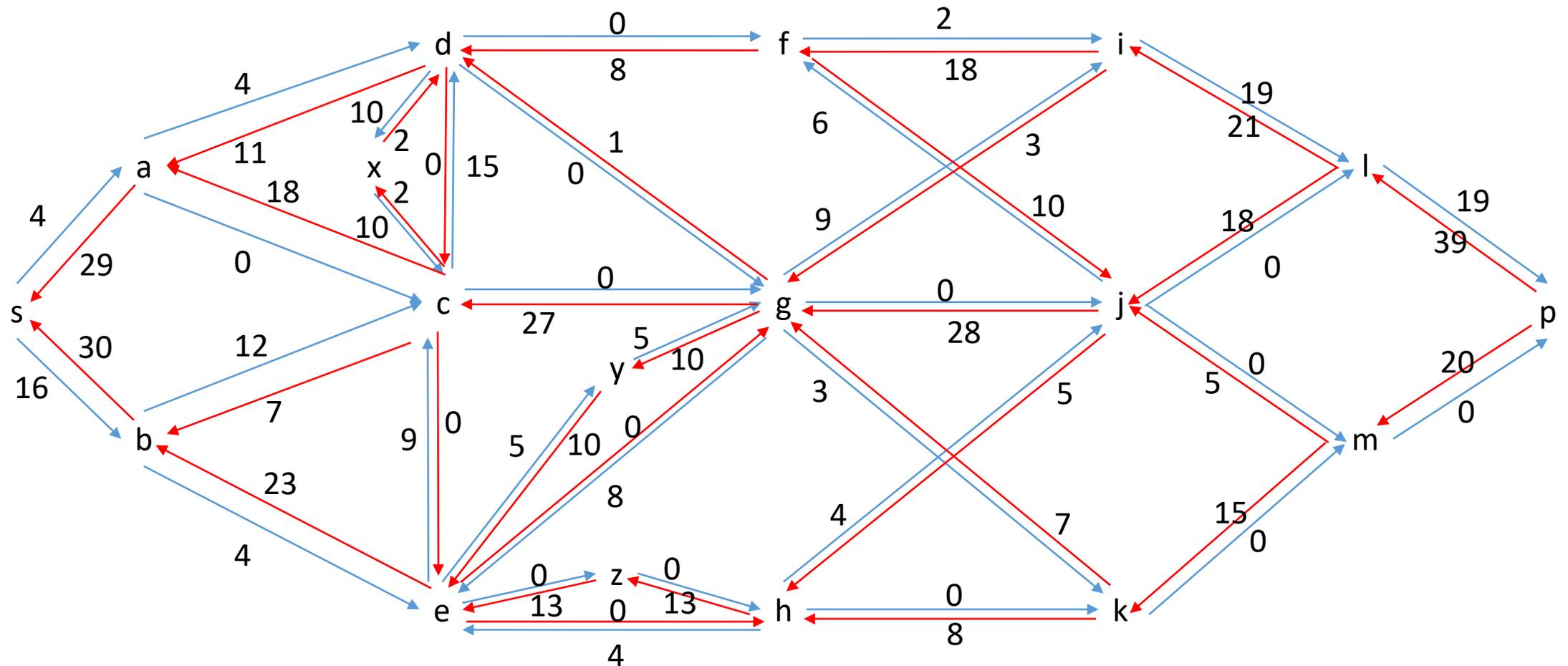
Exercice 2 : Réseau résiduel



Exercice 2 : Calcul du flot maximal

- Nous cherchons un chemin de s à p : sadxcgilp capacité 2
- Nous devons calculer le réseau résiduel
- Nous cherchons un chemin de s à p : sbeygjfilp capacité 10
- Nous devons calculer le réseau résiduel

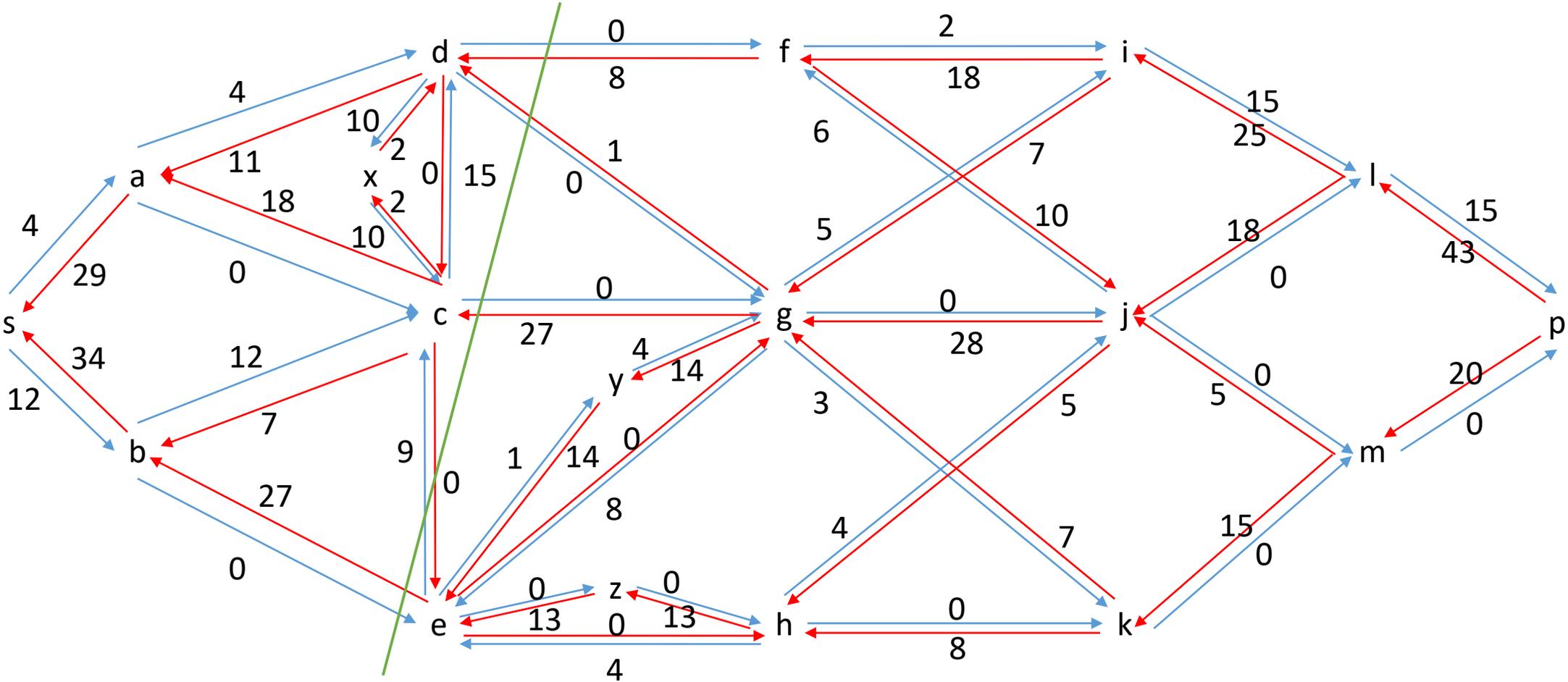
Exercice 2 : Réseau résiduel



Exercice 2 : Calcul du flot maximal

- Nous cherchons un chemin de s à p : $sbeygilp$ capacité 4
- Nous devons calculer le réseau résiduel
- La coupe minimale apparaît alors : $\{s,a,b,c,d,x\}$ puisque le cocycle sortant de cet ensemble ne contient que des arcs de capacité résiduelle nulle

Exercice 2 : Réseau résiduel

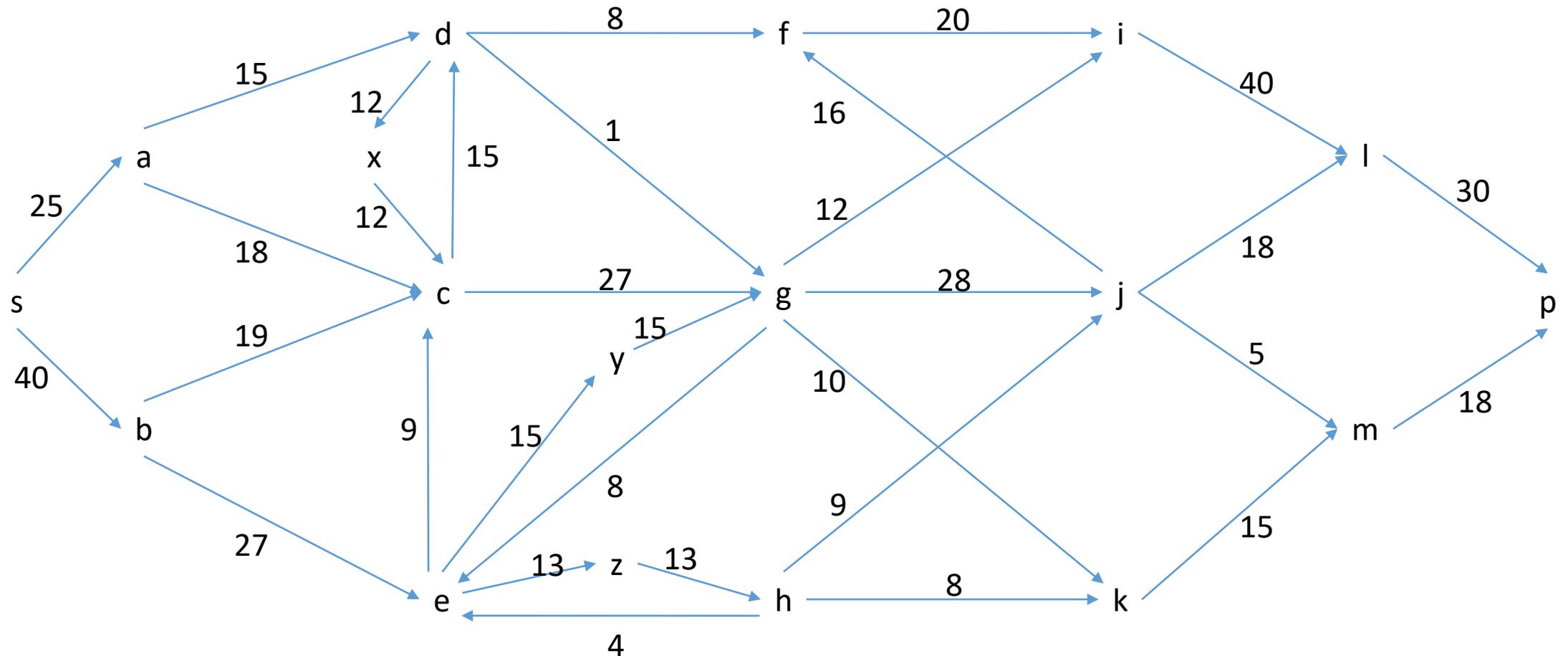


Exercice 3 : Brider sources et puits

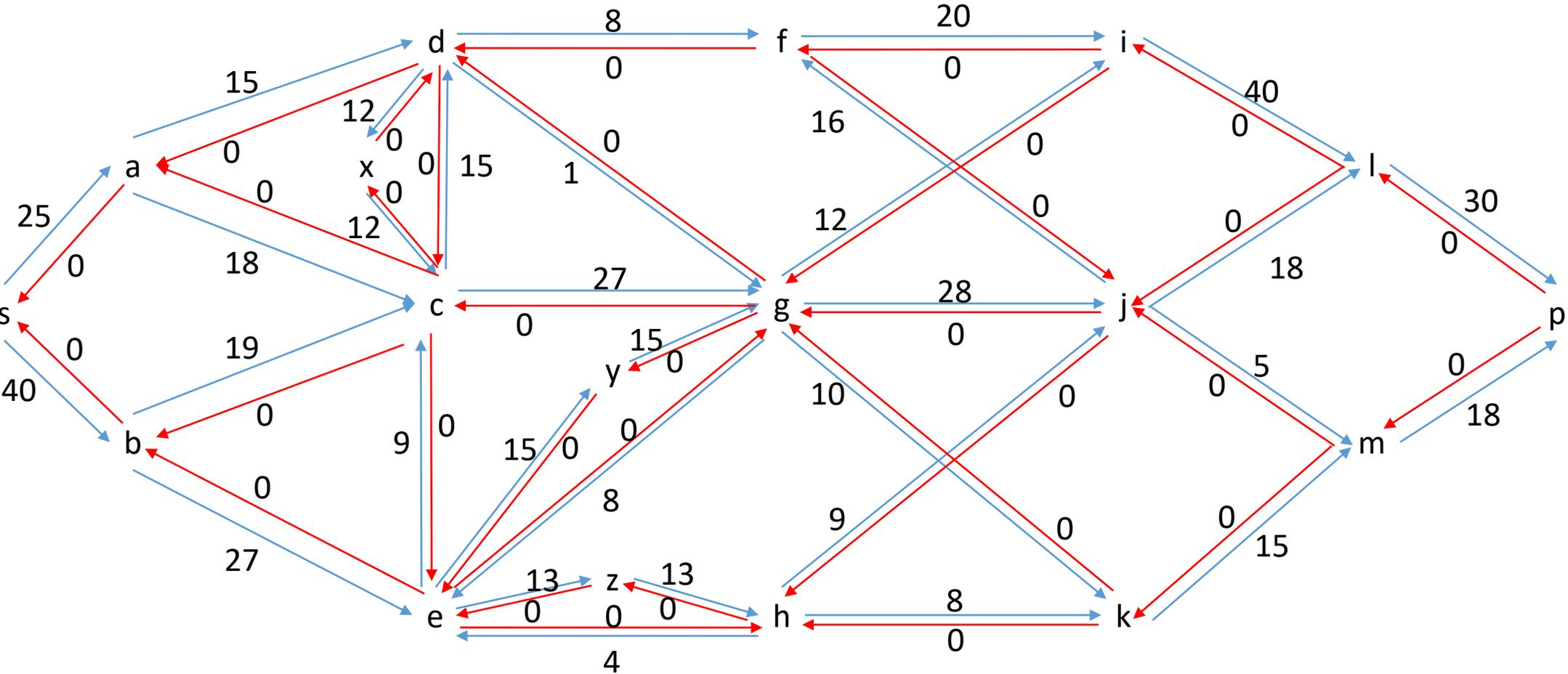
- Pour que a ne produise pas plus de 25 on limite la capacité de l'arc (s,a) à 25. De même pour que b ne produise pas plus de 40 on limite la capacité de l'arc (s,b) à 40.
- Pour des raisons duales pour savoir si les deux puits l et m peuvent recevoir simultanément respectivement 30 et 18, on limite la capacité de l'arc (l,p) à 30 et de l'arc (m,p) à 18.



Exercice 3 : Le graphe transformé



Exercice 3 : Réseau résiduel initial



Exercice 3 : Brider sources et puits

- Reste à calculer le flot maximal de s à p . Si le flot maximal vaut 48 ($30+18$) alors la réponse est oui. Dans le cas contraire la réponse est non.

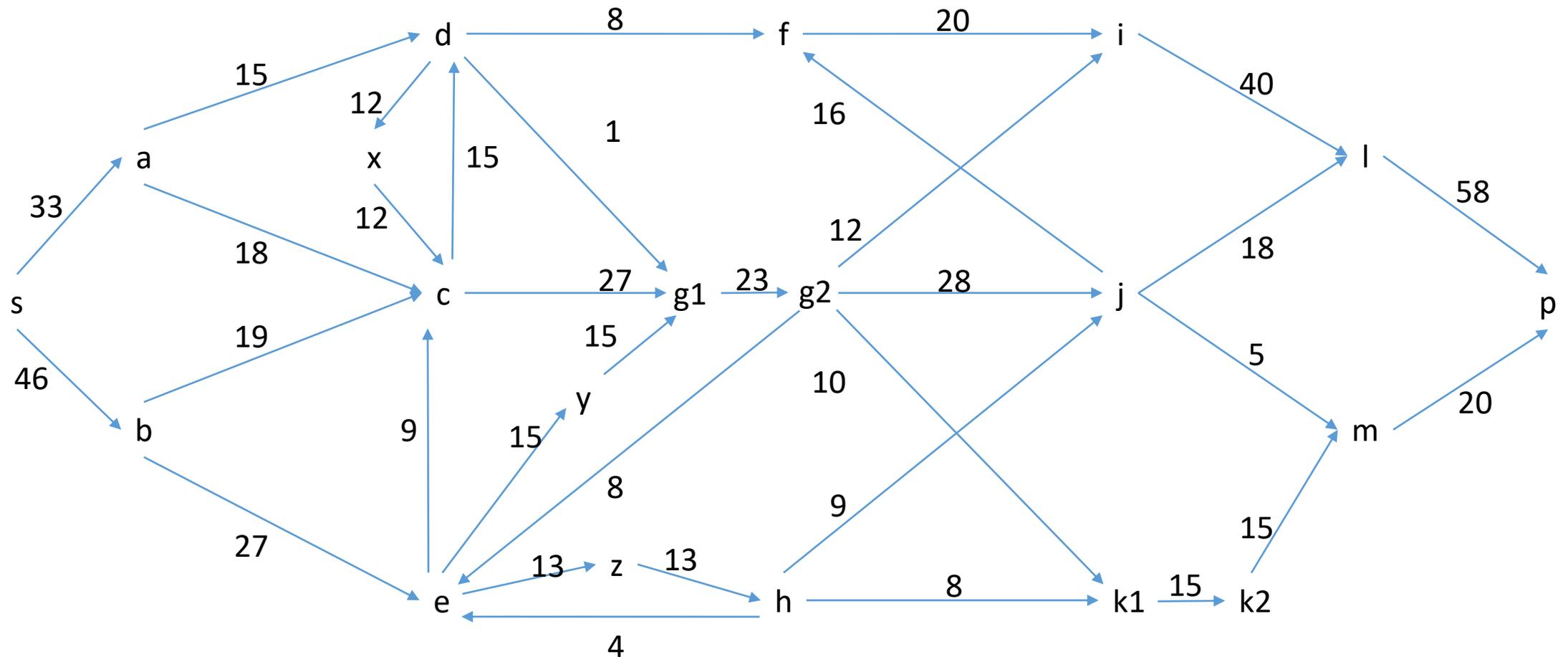


Exercice 4 : Brider des nœuds

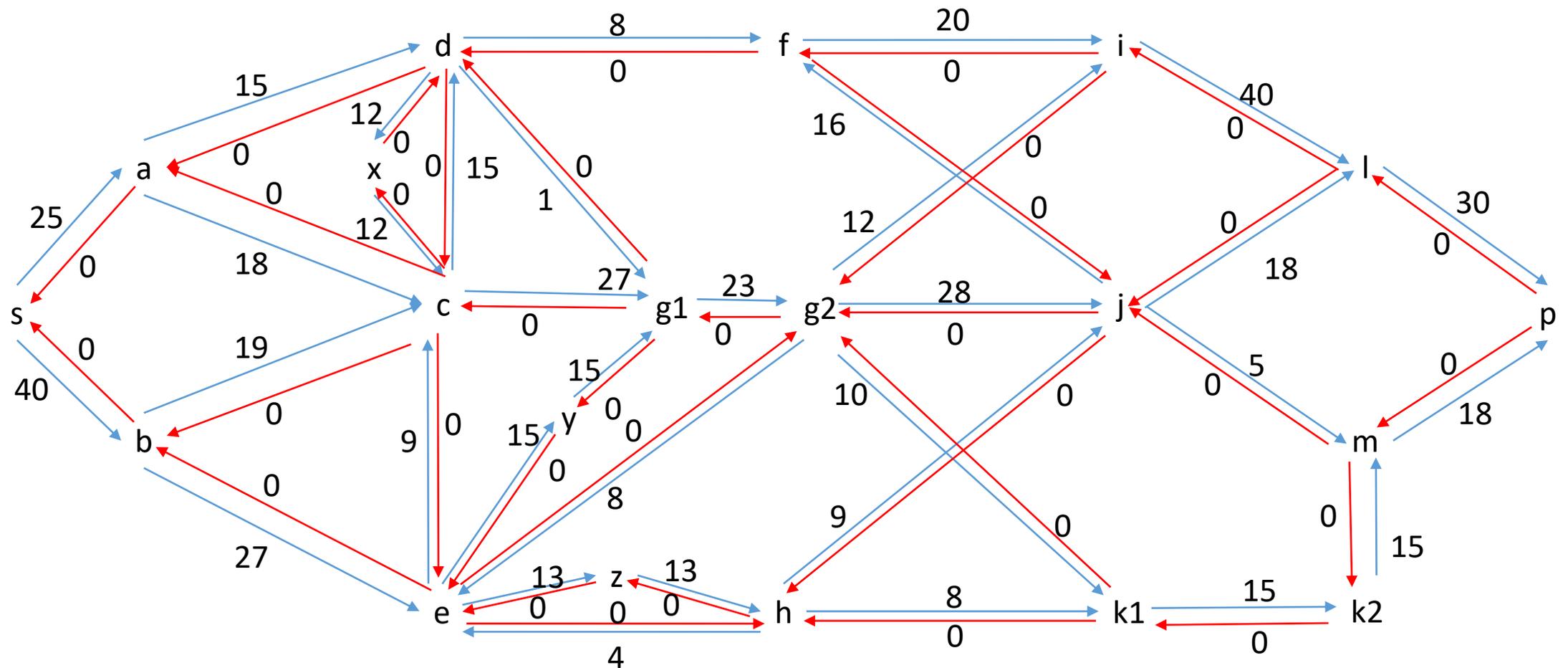
- On remplace le sommets g par deux sommets g_1 et g_2 Nous allons définir les successeurs et prédécesseur de ces deux sommets :
 - $\text{Pred}(g_1) = \text{Pred}(g)$, $\text{Pred}(g_2) = \{g_1\}$
 - $\text{Succ}(g_2) = \text{Succ}(g)$, $\text{Succ}(g_1) = \{g_2\}$
 - $C(g_1, g_2) = 23$
- On fait une transformation similaire pour k .
- A partir du réseau résiduel initial on calcule alors le flot maximal qui respectera les contraintes données.



Exercice 4 : Le graphe transformé



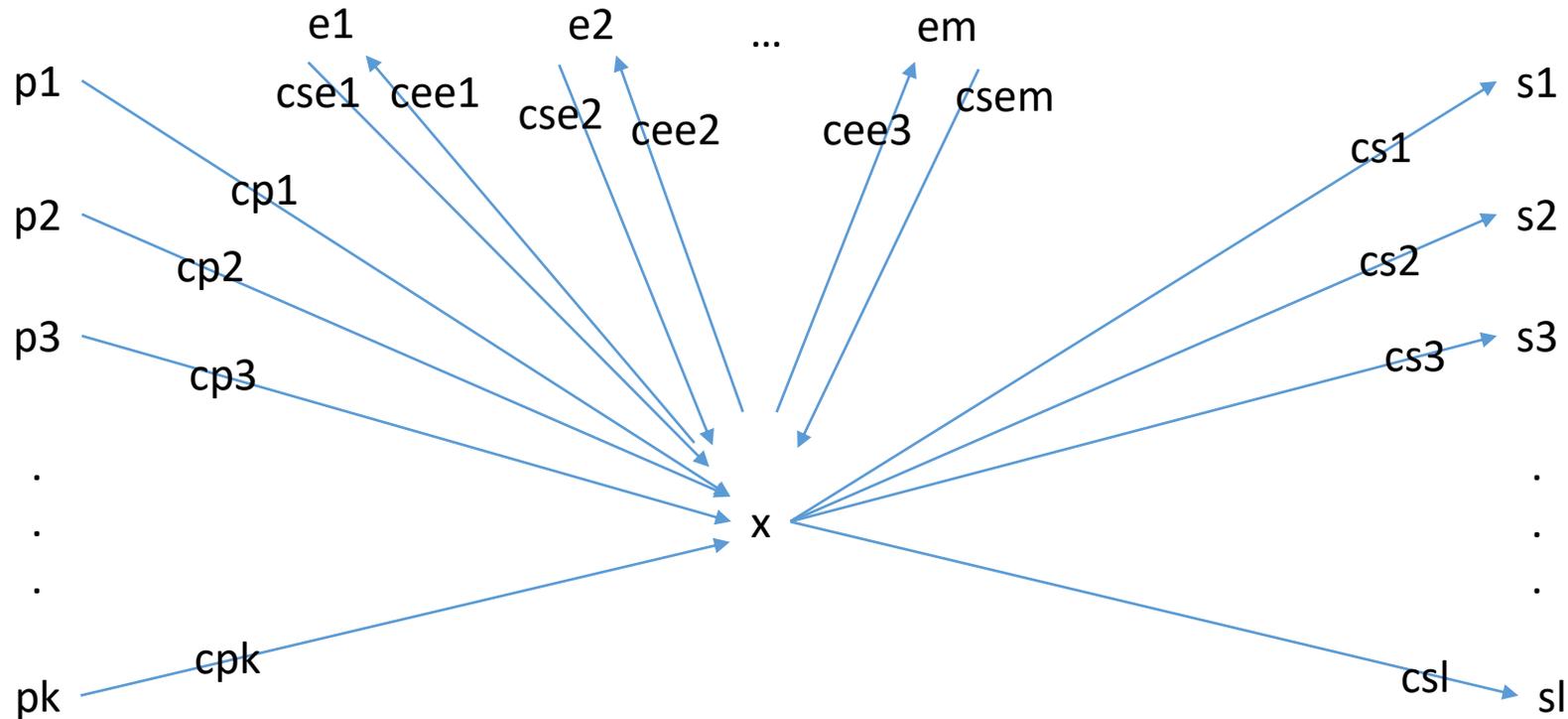
Exercice 4 : Réseau résiduel initial



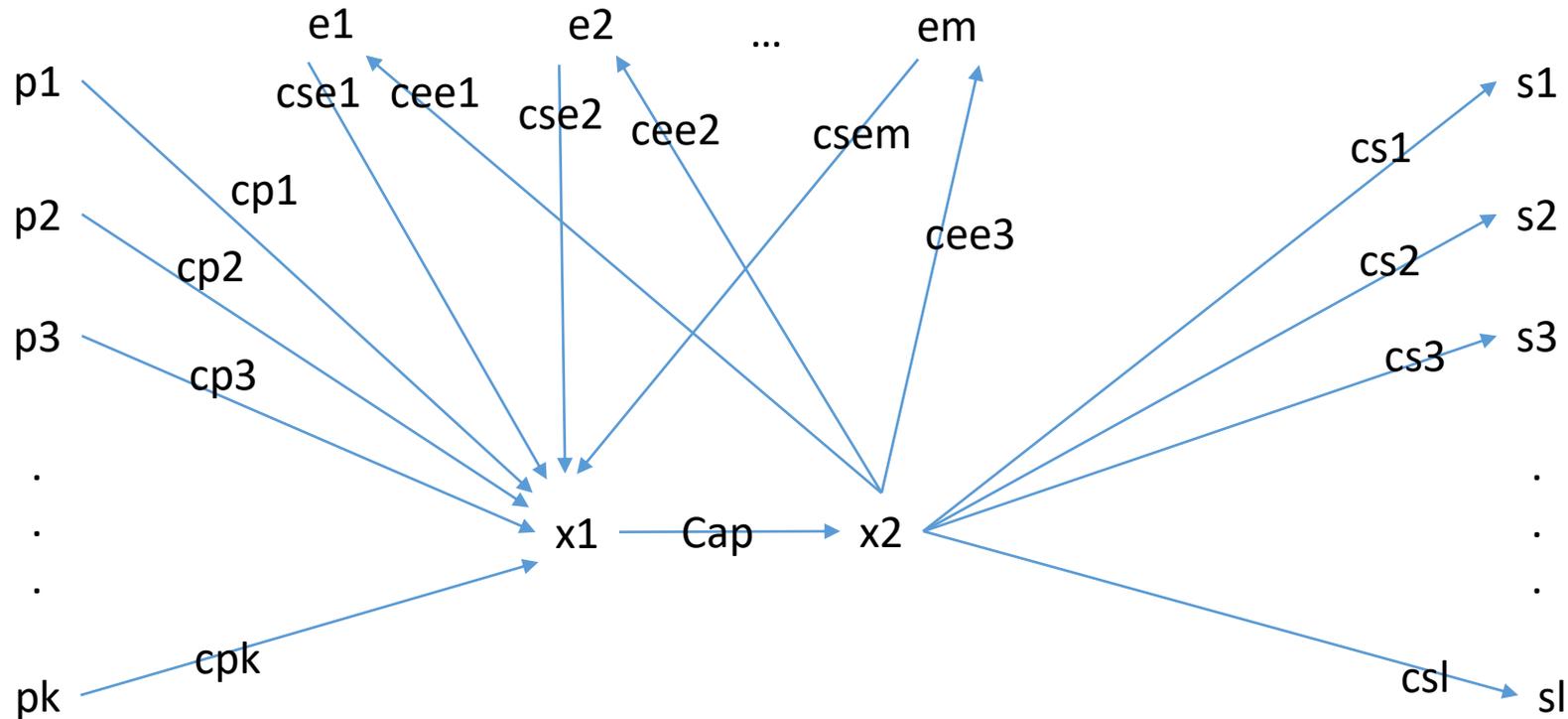
Exercice 4 : Remarque

Une démarche similaire peut aussi être utilisée pour rendre le graphe antisymétrique en ajoutant au plus n nœuds et n arcs

Exercice 4 : Remarque



Exercice 4 : Remarque



Avec $\text{Cap} = cp_1 + cp_2 + cp_3 + \dots + cp_k + cse_1 + cse_2 + \dots + csem$



Fin du TD