

UPJV Licence III Phys/Phys-Chim

Physique subatomique

La forme de l'observable quantique impulsion est intimement liée à la structure du groupe des translations d'espace. L'action des translations sur les f.o. est définie de la façon suivante:

$$\hat{T}_{\vec{a}}\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x} + \vec{a}, t) \quad (1)$$

Cette définition permet d'identifier l'opérateur de translation au développement en série, $\hat{T}_{\vec{a}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n}{n!} \right) \equiv \exp(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})$ (2)

On peut y faire apparaître l'opérateur, $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ de sorte que les translations prennent la forme

$$\hat{T}_{\vec{a}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \hat{P}\right) \quad (3)$$

L'action de cet opérateur \mathbf{P} sur les états libres (ondes planes) $\hat{P}\psi = \hbar \vec{k}\psi$ fait apparaître ces états comme états propres dont les valeurs propres coïncident avec les quantités de mouvement de la particule: On peut donc interpréter \mathbf{P} comme l'observable impulsion d'une particule. On peut de la même façon en considérant les translations temporelles des f.o. montrer que l'opérateur-énergie prend la forme,

$$\hat{H} = i\hbar \partial / \partial t \quad (4)$$

Le principe de correspondance permet alors, à partir de l'expression classique de l'énergie en fonction de la position et l'impulsion de déduire l'équation d'évolution de Schrödinger selon la procédure

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \mapsto \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

Questions

- 1- Donner la forme de l'onde plane décrivant une particule libre d'énergie E et impulsion \underline{p} contenue dans une boîte de volume V .
- 2- Calculer l'action d'une translation \hat{T}_a sur les états d'onde plane.
- 3- En déduire que les ondes planes sont fonctions propres des opérateurs de translation.
- 4- Montrer de la même façon que les ondes planes sont aussi fonctions propres de l'opérateur énergie (4).
- 5- Que peut-on en conclure sur le commutateur des opérateurs énergie et impulsion d'une particule libre? Quel principe fondamental de la Mécanique ce résultat traduit-il?
- 6- Quelles relations lient la quantité de mouvement et l'énergie d'une particule libre classique de masse m dans les cas galiléen et einsteinien?
- 7- Former à partir du principe de correspondance les équations de propagation des f.o. de particules libres dans les cas galiléen et einsteinien.
- 8- Comparer les deux équations obtenues en mettant en évidence les différences notables.
- 9- Que devient l'équation de propagation relativiste (einsteinienne) pour des particules de masse nulle?
- 10- Dans le cas einsteinien, chercher les solutions en ondes planes (particules de masse non nulle) et mettre en évidence une difficulté sérieuse de l'équation relativiste.

Examen Final
Mécanique Analytique
Durée : 3 Heures

Exercice 1 : Pendule Elastique

On considère un système formé d'un pendule de longueur ℓ et dont la tige passe par l'axe principal d'un ressort de constante de raideur k . Les masses de la tige du pendule et celle du ressort sont négligeables. Ce ressort est relié à une masse m par une glissière sans frottements. La masse m peut donc mouvoir le long de la tige (voir Figure 1). La longueur du ressort dans sa position d'équilibre verticale est ℓ_c .

1. Calculer la longueur à vide ℓ_0 du ressort en fonction de ℓ_c et des autres paramètres. En déduire l'expression de l'énergie élastique du ressort.
2. Calculer le Lagrangien L du système en choisissant ℓ et α comme coordonnées généralisées.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système.
4. Ecrire l'Hamiltonien du système.
5. Ecrire les équations d'Hamilton du système.
6. Linéariser les équations de Lagrange pour des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre.
7. Résoudre ces équations : on déterminera les fréquences des modes propres et de battements du système. Faire des petits schémas explicatifs.

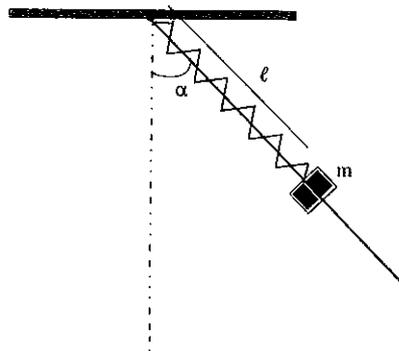


Figure 1

Exercice 2

On considère le modèle planétaire constitué du soleil de masse M , la terre de masse m et la lune de masse μ . Le soleil se trouve au centre des mouvements et est supposé fixe. La terre tourne autour du soleil et la lune autour de la terre.

Les orbites des deux corps cosmiques sont supposés circulaires. Les coordonnées généralisées décrivant les mouvements des masses m et μ peuvent être désignées par les angles φ et θ comme indiqués sur la Figure 2.

Calculer l'énergie cinétique T du système en fonction des vitesses généralisées.

Calculer l'énergie potentielle U du système en fonction de ses coordonnées généralisées.

En déduire l'expression du Lagrangien L du système.

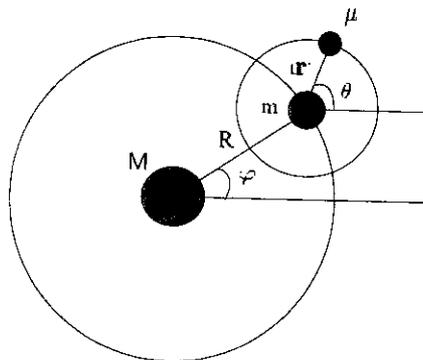


Figure 2

Rappel : L'énergie d'interaction entre deux masses M_1 et M_2 séparées par une distance r s'exprime sous la forme : $U = -G \frac{M_1 M_2}{|r|}$.

Examen de Mécanique des Systèmes

Gagou Yaovi

Exercice 1 : Mouvement plan sur plan

Un cerceau de centre O_1 et de rayon R roule sur une droite fixe du repère fixe $R_0(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ OND, en restant dans un plan vertical. Ici, la droite est représentée par l'axe (O, \vec{e}_1) .

Soit $R_1(O_1, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, le repère OND lié au cerceau.

Le cerceau se trouve dans le plan $(O_1, \vec{f}_1, \vec{f}_2) \parallel (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; on a alors : $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

Soient $P(x, y, z)$ le point de contact avec l'axe (O, \vec{e}_1) , θ désigne l'angle (\vec{e}_1, \vec{f}_1) et x l'abscisse de O_1 dans le plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

1. Calculer la vitesse de glissement \vec{V}_{gt} du point de contact P (Rappel $\vec{V}_{gt} = \vec{V}(P \in R_1/R_0)$).
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement au point P.
3. En déduire l'intégrale première du mouvement.
4. Préciser le Centre Instantané de Rotation (CIR) du mouvement et expliquer.
5. Déterminer la Base et la Roulante du mouvement.

Exercice 2 : Glisseur

Considérons les vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$, liés respectivement aux points $A(1, 0, 0)$ et $B(1, 1, 0)$ et les torseurs $[G_1]$ et $[G_2]$ associés aux moments de \vec{u} et \vec{v} , respectivement.

1. Montrer que $[G_1]$ et $[G_2]$ sont des glisseurs.
2. On pose $[G] = [G_1] + [G_2]$.
 - a.) Calculer la résultante \vec{R} de $[G]$ et son moment en A. En déduire la nature de $[G]$.
 - b.) Déterminer l'équation cartésienne de l'axe central de $[G]$.

Nom :

Prénom :

n°étudiant

examen de mécanique des systèmes, licence de physique UPJV juin 2022 doc autorisé sous la forme d'une feuille A4 manuscrite.

Le sujet est votre copie qui est à remettre en fin d'épreuve

1 Nous sommes dans un espace proprement euclidien de dimension 3 dans lequel une base des \bar{e}_j est donnée par $\bar{e}_1(1,1,1), \bar{e}_2(0,1,1), \bar{e}_3(0,0,1)$. On se donne les points $A(4,1,2)$ et $B(1,3,5)$.

Exprimer les composantes contravariantes des vecteurs directeurs \bar{A} et \bar{B} **(seul le résultat est exigé)**

Exprimer les composantes covariantes des vecteurs \bar{A} et \bar{B} **(seul le résultat est exigé)**

Ecrire sous forme intrinsèque le produit tensoriel de \bar{A} et \bar{B} pris dans cet ordre, à l'aide des composantes contravariante covariante du tenseur produit tensoriel. **(seul le résultat est exigé)**

Exprimer la contraction de ce tenseur par le vecteur $\vec{C} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ (seul le résultat est exigé)

contracter le résultat de la question précédente ?

Rattrapage Mécanique Quantique

Exercice 1. Une propriété des fonctions d'onde gaussiennes.

On se propose ici d'établir les fameuses relations d'incertitude de Heisenberg. Nous allons pour cela exprimer la condition de positivité de l'expression,

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (x - \langle x \rangle) \psi + i\lambda \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right) \psi \right|^2 dx$$

pour tout réel λ . Dans cette expression on a introduit la position moyenne (qui dépend du temps) et l'impulsion moyenne de la particule,

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx, \langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

Compte tenu de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, les variances des fluctuations de position et d'impulsion de la particule valent respectivement

$$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |\psi|^2 dx, \Delta p_x^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right)^2 \psi dx$$

Les écart-types correspondant Δx et Δp_x étant les incertitudes sur les position et quantité de mouvement. On notera enfin que la notation $\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right)^2$ où un opérateur est « élevé au carré » désigne une composition de l'opérateur avec lui-même, de sorte que

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\hbar}{i} \langle p_x \rangle \frac{\partial}{\partial x} + \langle p_x \rangle^2.$$

- 1- En développant l'expression montrer que

$$I(\lambda) = \Delta x^2 + \lambda^2 \Delta p_x^2 - \lambda \hbar$$

- 2- Quelle est la condition de positivité de cette expression ?
- 3- En déduire l'inégalité liant les incertitudes de position et d'impulsion, $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.
- 4- Si la position d'une particule est mesurée avec précision, que peut-on dire de son impulsion ?
- 5- Inversement si l'impulsion d'une particule (le long d'une direction donnée de l'espace) est connue, que peut-on dire de sa position ?
- 6- En déduire qu'un photon appartenant à un faisceau lumineux rectiligne de fréquence ν n'a pas de position définie.
- 7- Chercher l'extremum de la fonction $I(\lambda)$. Quelle est la nature de cet extremum ?

8- A quelle condition sur Δx et Δp_x la fonction I s'annule-t-elle en cet extremum ?

Questions facultatives (et difficiles)

9- Montrer que les fonctions d'onde pour lesquelles cette condition est réalisée sont solution de l'équation,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{(x - \langle x \rangle) - i \frac{\hbar}{2\Delta p_x^2} \langle p_x \rangle}{\hbar^2 / 2\Delta p_x^2} \psi$$

10- Quelle est la forme générale de ces fonctions d'onde ?

11- En déduire que lorsque la densité de probabilité de position est gaussienne, le produit des incertitudes de position et impulsion est minimal.

Exercice 2. Recherche de potentiels.

Une particule de masse m se déplaçant sur l'axe Ox est décrite par une fonction d'onde de la forme,

$$\psi(x, t) = A e^{-a \left[\frac{m x^2}{\hbar} + i t \right]} \quad (1)$$

où A et a sont deux constantes réelles positives.

1- Montrer que cette fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger dépendant du temps

pour un potentiel $V(x)$ que l'on déterminera. On calculera successivement $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ et $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

2- Montrer que ce potentiel est celui d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation de vibration en fonction de a .

3- La fonction d'onde (1) est-elle stationnaire ? Comment la constante a est-elle reliée à l'énergie E de la particule ?

4- Déterminer la constante A .

5- En déduire la densité de probabilité de présence $|\psi(x, t)|^2$ de la particule en un point d'abscisse x . Commenter.

6- Calculer les positions moyenne $\langle x \rangle(t)$ et quadratique moyenne $\langle x^2 \rangle(t)$ de la particule.

7- On s'intéresse maintenant à la « limite classique » de la fonction d'onde (1) obtenue en prenant $\hbar \rightarrow 0$.

a- Montrer à partir de la question 4- que l'on peut écrire $|\psi|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2}$ où l'on précisera la valeur de la constante α .

b- Montrer que l'on obtient la limite classique par le passage $\alpha \rightarrow \infty$.

c- En déduire que $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\psi|^2 = \delta(x)$ (distribution de Dirac).

d- Interpréter le résultat et montrer qualitativement que celui-ci indique que l'onde (1) décrit la particule dans son état de plus basse énergie (état fondamental).

Nota Bene.

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (b > 0)$$

* On rappelle que $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x=0 \end{cases}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

Exercice 3. Etat fondamental et états excités de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique 1D (masse m) de pulsation ω en mouvement le long de l'axe Ox .

- 1- Déterminer l'état fondamental de cet oscillateur.
- 2- Donner l'expression en représentation position des f.o. des 2 premiers états excités $\psi_1(x), \psi_2(x)$. Quelle est leur parité ?
- 3- En déduire les d.p. de position correspondantes. En analysant leurs formes, donner une interprétation du nombre quantique n indexant les états stationnaires de l'oscillateur.
- 4- En calculant l'action de l'opérateur position \hat{X} sur l'état $\psi_n(x)$, établir une relation entre les f.o. stationnaires $\psi_n(x), \psi_{n\pm 1}(x)$.

Exercice 4. Oscillateur 1D : évolution temporelle

On considère l'état quantique suivant d'un oscillateur (de pulsation ω)
 $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, superposant les états à 0 et 1 quantum de vibration.

- 1- Cet état est-il normalisé ?
- 2- Donner l'interprétation statistique de cet état.
- 3- Réexprimer cet état à partir de l'opérateur création b^+ .
- 4- Calculer le nombre moyen de quanta dans cet état et en déduire son énergie moyenne.
- 5- Déterminer l'évolution de cet état au cours du temps.
- 6- Quel est le nombre moyen de quanta à l'instant t ?

THERMODYNAMIQUE ET APPLICATIONS (S6)

2nde session

Seule la calculatrice est autorisée

Durée 2h00

Exercice 1

Une mole de gaz parfait monoatomique se trouve dans l'état initial (P_0, V_0, T_0) . Au cours d'une transformation réversible, il reçoit une quantité de chaleur $Q = \frac{3RT_0}{2}$.

Exprimer les grandeurs ci-dessous par rapport à leur valeur dans l'état initial :

1. Evaluer la pression P_1 et le volume V_1 finaux si la transformation est isotherme.
2. Evaluer la pression P_1 et la température T_1 finales si la transformation est isochore.
3. Evaluer la température T_1 et le volume V_1 finaux si la transformation est isobare.

Exercice 2

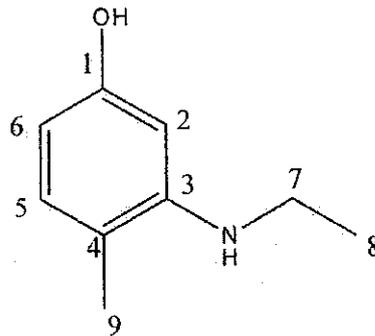
Un barreau métallique hétérogène est composé de trois tiges en acier, en aluminium et en cuivre, de même longueur et de même section soudées entrée et de conductibilités thermiques respectives λ_1 , λ et λ_2 supposées indépendantes de la température. La surface latérale du barreau est isolée thermiquement ; l'extrémité libre de la tige d'acier est en contact avec un thermostat maintenu à la température T_1 et l'extrémité libre de la tige de cuivre est en contact avec un thermostat maintenu à la température T_2 ($T_2 < T_1$).

- 1- Exprimer en régime permanent les températures T'_1 de la jonction acier-aluminium et T'_2 de la jonction aluminium-cuivre en fonction de T_1 , T_2 , λ et λ_2 .
- 2- Montrer que l'écart de température entre les deux jonctions est proportionnel à l'écart de température entre les extrémités libres.
- 3- On donne $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$, $\lambda_1 = 45 \text{ Watt.m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ pour l'acier et $\lambda_2 = 380 \text{ Watt.m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ pour le cuivre. On mesure expérimentalement $T'_1 - T'_2 = 16,2^\circ\text{C}$ en régime stationnaire. Calculer à l'aide de ces résultats :
 - a) La conductibilité thermique λ de l'aluminium.
 - b) Les températures T'_1 et T'_2 des deux jonctions.

Partie RMN (1H30)

Les parties RMN et Spectrométrie de masse doivent être traitées sur des copies séparées. L'attribution peut se faire directement sur les spectres, joindre les spectres à la copie avec votre N° d'étudiant

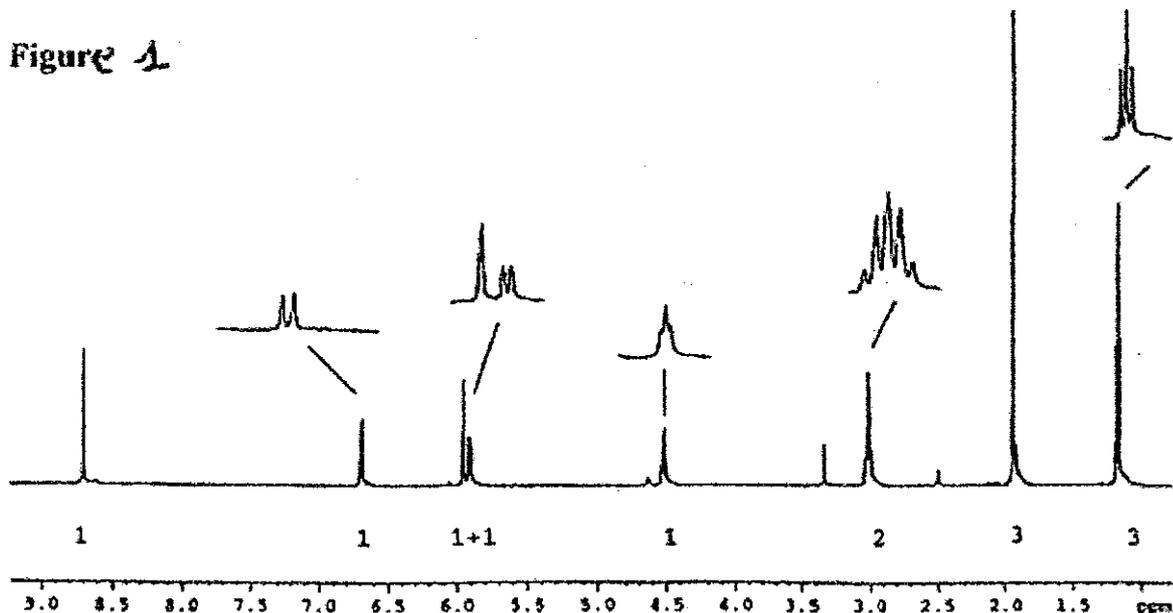
L'analyse structurale par RMN dans le d_6 -DMSO d'un précurseur de colorant laser a été effectuée. La structure proposée est la suivante :



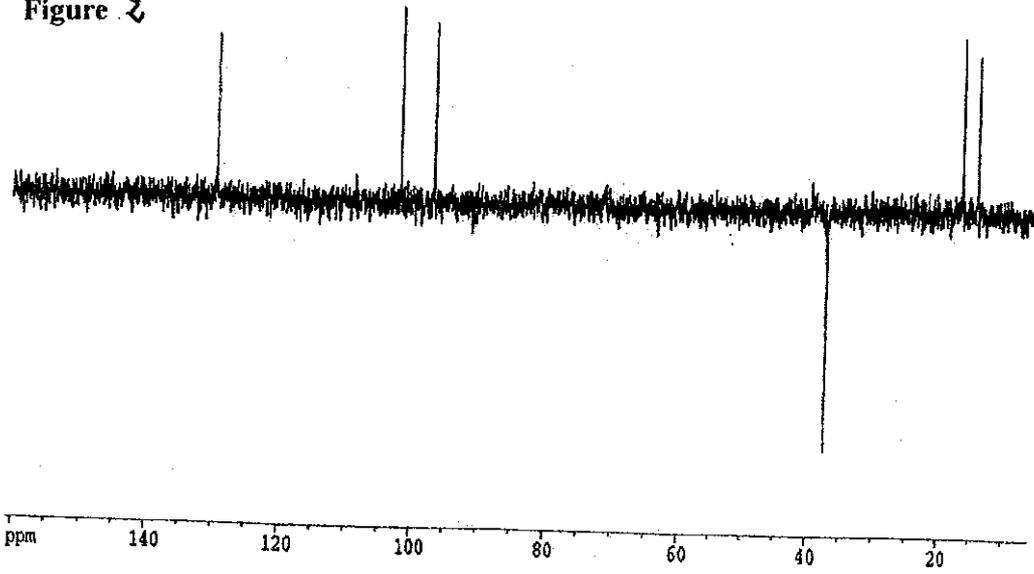
Plusieurs expériences RMN ont été réalisées : spectre ^{13}C découplé proton, DEPT135, Corrélation Carbone-Proton et spectre ^1H , et sont représentées ci-après.

- 1- Quelle est la valeur du champ magnétique B_0 sachant que le spectre ^1H a été réalisé à 400 MHz? ($\gamma_{\text{H}} = 267,512 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)
- 2- Relier les 4 expériences RMN aux 4 figures correspondantes. Quelles informations doit-on observer pour chaque expérience ?
- 3- Attribuer le maximum carbones en respectant la numérotation à partir des spectres ^{13}C découplé proton et DEPT135. Justifier brièvement.
- 4- A l'aide de la corrélation carbone-proton attribuer le maximum de signaux protons. Quels sont les 2 signaux protons qui ne peuvent être attribués ? pourquoi ?
- 5- Spectre ^1H : si on ajoute un peu de D_2O dans le tube RMN, les 2 signaux à 8,7 ppm et 4,5 ppm disparaissent. De même le signal à 3,05 ppm se simplifie et devient un quadruplet. Que peut-on en conclure ?
- 6- A partir de l'ensemble de ces données attribuer les signaux de tous les protons et Expliquer la multiplicité des signaux à 1,2 et 3,05 ppm d'une part et à 5,9 et 6,7 ppm d'autre part
- 7- A partir des données ^1H , attribuer sans ambiguïté les carbones C2, C5 et C6 ? justifier.

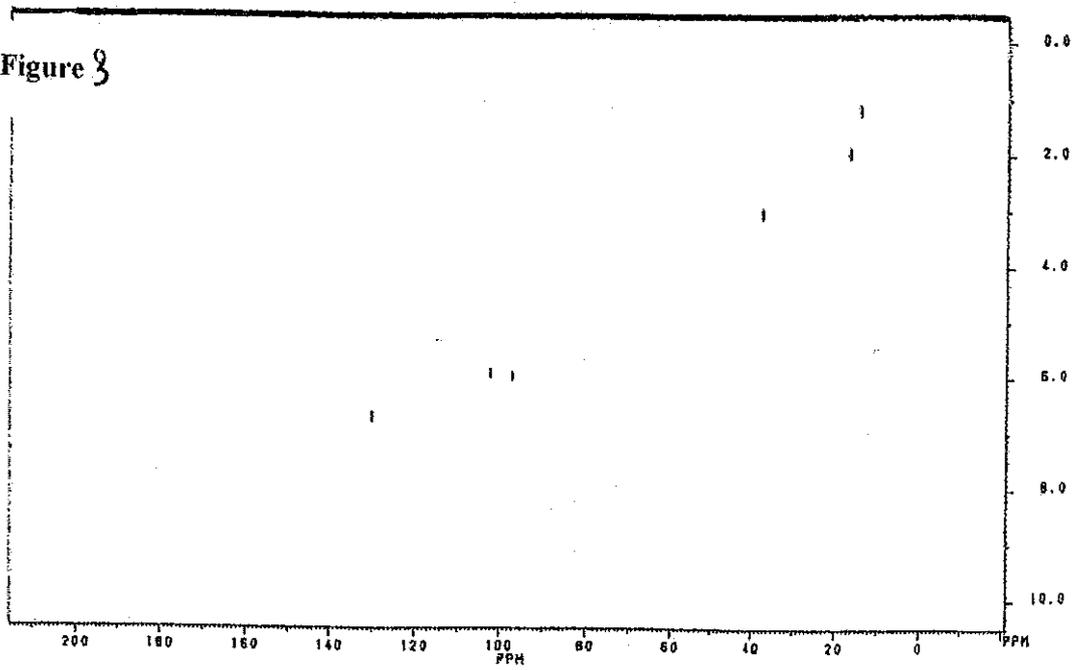
Figure 1



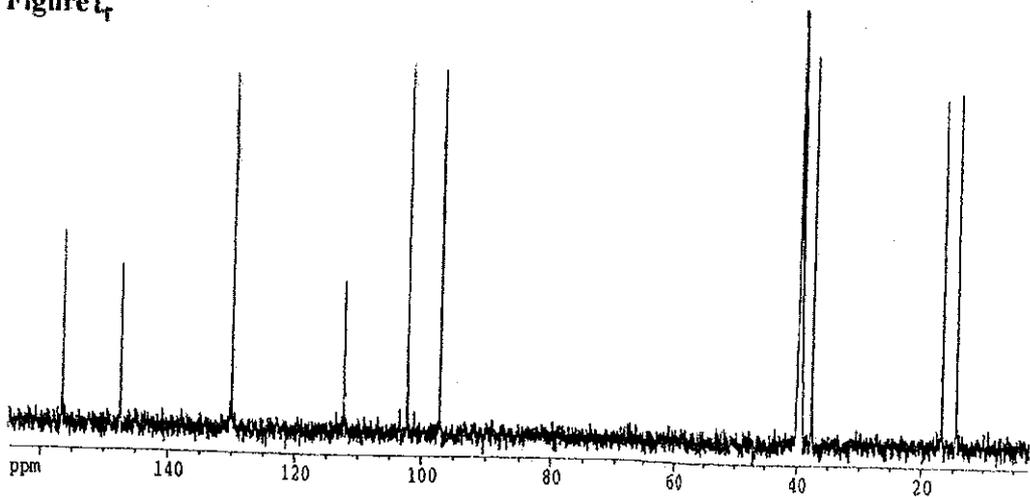
Exercise I Figure 2



Exercise I Figure 3



Exercise I Figure 4



Partie Spectrométrie de masse (durée 30 min)

1°) Calculez les intensités relatives des pics de l'amas isotopique d'un composé dichloré

2°) Une molécule organique A composée uniquement de C, d'H, de Br et/ou Cl et d'O a pour masse moléculaire 204. Son spectre obtenu par ionisation électronique présente pour l'ion moléculaire une amas isotopique constitué des pics suivants :

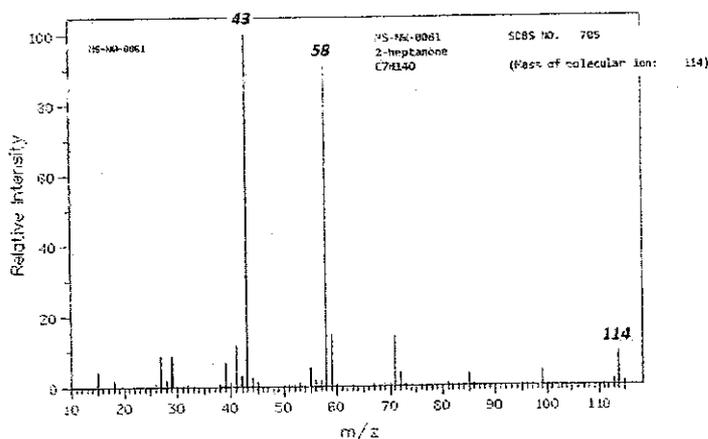
| m/z | Intensité rel. |
|-----|----------------|
| 204 | 32,9 |
| 205 | 3 |
| 206 | 21 |
| 207 | 1,9 |
| 208 | 3,7 |

a°) Calculez le nombre de carbone de la molécule A.

b°) Déduisez des intensités des pics de l'amas isotopique de l'ion moléculaire le nombre d'atomes de brome et/ou de chlore présent dans A.

c°) Proposez une formule brute pour la molécule A.

3°) le spectre de masse de l'heptan-2-one (ion moléculaire de masse 114) présente entre autres 2 fragments à : $m/z = 43$ et $m/z = 58$



<https://sdb.sdb.aist.go.jp> (21-04-2022)

Ecrivez le mécanisme de formation de ces 2 ions

Données : masse et abondance ¹H (1,007825 ; 99,9855%) ; ²H (2,014102 ; 0,0145%) ¹²C (12,0000 ; 98,888%) ; ¹³C (13,003355 ; 1,112%) ; ¹⁶O (15,994914 ; 99,759%) ; ¹⁷O (16,999132 ; 0,0374%) ; ¹⁸O (17,999162 ; 0,2039%) ; ³⁵Cl (34,968853 ; 75,771%) ; ³⁷Cl (36,965903 ; 24,229%) ; ⁷⁹Br (78,918328 ; 50,537%) ; ⁸¹Br (80,916282 ; 49,463%).

Université de Picardie

Année 2021-2022

Département de physique

Licence de physique semestre S6 Session 2

Outils mathématiques Durée 2H

1/ Déterminer toutes les valeurs prises dans C de

a. $(-2)^{\sqrt{2}}$, b. 1^{-i}

2/ Déterminer dans C les racines des équations suivantes

a/

$$z^6 - 1 = 0$$

b/

$$(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0$$

3/ On considère le polynôme $P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy + dy^3$.

a/ A quelle condition sur les constantes a, b, c, d , $P(x, y)$ est-il harmonique ?

b/ Obtenir le polynôme harmonique $Q(x, y)$ conjugué de P .

c/ Montrer que $P(x, y) + iQ(x, y)$ est une fonction holomorphe.

4/ Développer en série de Laurent, dans une couronne centrée en $z = 0$, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

5/ Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Problème 1

Dans un gaz dilué formé d'une seule espèce chimique, Le nombre de molécules ayant la vitesse v à dv près est

$$dn(v) = \tilde{F}(v)dv$$

où

$$\tilde{F}(v) = 4\pi v^2 n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

(n nombre de molécules par unité de volume spatial, T température du gaz, m masse d'une molécule, k_B constante de Boltzmann).

a/ Un flux monocinétique composé de molécules ayant la vitesse \vec{v} à $d\vec{v}$ près frappe une paroi d'aire dS (dirigée suivant Oz). Déterminer la pression partielle sur la paroi. On suppose les chocs élastiques.

b/ En intégrant l'expression trouvée en a/ sur l'espace des vitesses, en déduire la pression P du gaz.

Problème 2

On considère un système composé de N particules identiques mais discernables. Ces particules sont réparties sur des niveaux i d'énergie E_i avec N_i particules sur le niveau i .

a/ Rappeler la définition d'un état macroscopique chez Boltzmann dans le cas d'un gaz formé de particules discernables et non-interagissantes.

b/ Calculer le nombre de complexions W qui caractérise l'état macroscopique (N_1, N_2, \dots) .

c/ Le système est caractérisé par $N = Cte$ et $U = Cte$ (U étant l'énergie interne). Déterminer la distribution de particules N_i^0 sur les niveaux i lorsque l'équilibre thermodynamique est atteint. On introduira la fonction de partition $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$. Que représente β ?

d/ Exprimer U , S et F en fonction de Z .

Problème 2

Un système constitué d'un gaz parfait est caractérisé par la fonction de répartition

$$Z = \frac{V}{\Delta} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

UFR Sciences Amiens, License de Physique S5,

Outils Mathématique pour le Physique : Rattrapage

Ecrivez les réponses au bas des problèmes et ajoutez cette feuille à la copie

Il faut résoudre les 3 problèmes parmi 5. Les 3 meilleurs seront sélectionnés pour l'évaluation

Exercice 1.

Développer la fonction en séries de Fourier

$$f(t) = |\sin t|$$

Exercice 2.

Calculer l'image de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-x} \cos^2 x$

Exercice 3.

Trouver la solution de l'équation:

$$\Delta u = 0$$

l'intérieur du cercle avec $R = 1$ si $(\partial u / \partial r)_{r=1} = \cos 2\varphi$

Exercice 4.

Trouver la solution de l'équation: $u_t - 9u_{xx} = 0$ si $x \in (-\infty, \infty)$ et $u(x, 0) = \sin x$

Exercice 5. En employant la procédure de Gram-Schmidt pour la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ trouver les 3 premiers polynômes de Legendre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ortho-normalisée par la condition:

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{mn}$$

Examen final, mai 2022

Méthodes numériques

(Seules les notes de cours sont autorisées)

Exercice 1 : Interpolation de Lagrange

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- 1.) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : -2, -1, 0, 1, 2.
- 2.) Tracer sur le même graphique avec deux couleurs différentes, la fonction f et ce polynôme en fonction de $x \in [-5, 5]$ (on prendra un pas régulier de 0.01)

Exercice 2 : Dichotomie

On désire trouver un zéro de la fonction ci-après, en utilisant la méthode de dichotomie :

$$f(x) = x \cdot \sin(x) - 1$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{2})$. Montrer que l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ peut être choisi comme intervalle initial pour cette recherche.
2. Quel est le nombre maximal d'itérations nécessaires pour atteindre le résultat avec une précision à 10^{-3} près. (rappel : l'erreur de dichotomie sur la $n^{\text{ième}}$ itération est $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$)
3. Ecrire l'algorithme qui calcule la valeur approchée du zéro de cette fonction par la méthode de dichotomie, pour une erreur donnée.

Exercice 3 : Algorithme de Hörner

Pour calculer l'image $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ d'un réel x par un polynôme de degré 5, on peut utiliser l'écriture :

$$P(x) = x(x(x(x(a_5x + a_4) + a_3) + a_2) + a_1) + a_0$$
 appelée algorithme de Hörner.

Ecrire le programme de Matlab permettant de calculer l'image d'un réel x par un polynôme P de degré n , en utilisant l'algorithme de Hörner.

Exercice 4 : Equation différentielle ordinaire

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) = -2xy, \quad x \in [-5, 5], \quad y_0 = y(-5) = 2 \cdot e^{-25}$$

1. Calculer la solution exacte de cette équation différentielle. La constante d'intégration est $K=2$.
2. Par les méthodes d'Euler, Runge et Heun, trouver les valeurs approchées y_1 et y_2 de la fonction solution de cette équation différentielle au point $N^{\circ}2$ et $N^{\circ}3$ avec un pas $h = 0.02$.
3. Tracer sur le même graphique les 3 solutions numériques et la solution exacte sur un même graphique.

Examen Optique Ondulatoire S5 Session 2

Durée de l'épreuve : 2 H

Questions de cours

1/ Un dispositif interférométrique du type trous d'Young est éclairé par une source ponctuelle non-monochromatique ;

On donne l'intensité pour un intervalle dk du vecteur d'onde

$$d_k I(\delta) = A(1 + \cos k\delta) dk$$

La raie est rectangulaire, le vecteur d'onde est compris entre $k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k$.

a. Déterminer l'intensité totale en fonction de δ .

b. La fonction visibilité est définie par

$$V(\delta) = \frac{\sin \Delta k \delta}{\Delta k \delta}$$

Etablir un critère de visibilité des franges d'interférences.

2/ Une lame mince, placée dans le vide, a pour épaisseur e et indice de réfraction n . On l'éclaire, sous une incidence i par rapport à la normale, avec une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ .

a. Calculer la différence de marche δ .

b. Où se forme la figure d'interférences ? Décrire le phénomène observé.

3/ Rappeler sans démonstration le principe de Fresnel et la formule fondamentale correspondante.

Exercices :

Exercice 1

On considère un interféromètre de Michelson réglé de façon à obtenir des franges circulaires ($M_1 \perp M_2$) et éclairé avec une radiation de longueur d'onde $\lambda = 546 \text{ nm}$ dans le vide. A partir de cette situation, on éloigne le miroir M_2 de 1,1 mm parallèlement à son plan.

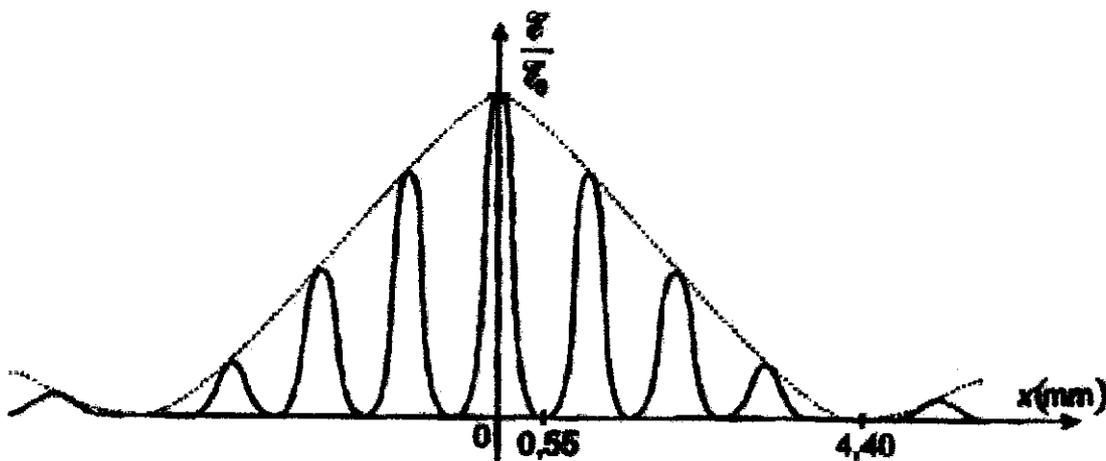
1. a) Déterminer le déphasage avant le déplacement du miroir M_2 .
 - b) Déterminer le déphasage après le déplacement du miroir M_2
 - c) En déduire le nombre de franges qui défilent au centre de la figure d'interférence lors du déplacement de M_2 .
- 2) On place devant le miroir M_1 une lame d'épaisseur $e' = 9,5 \mu\text{m}$ et d'indice $n = 1,517$. Calculer la variation de l'ordre d'interférence au centre de la figure.

Exercice 2

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$, provenant d'une étoile, éclaire normalement un écran opaque percé de deux fentes F_1 et F_2 de grande dimension L suivant Oy et de même largeur a selon Ox . Les centres des deux fentes sont distants de d avec $d > a$.

Dans le plan focal xOy d'une lentille de focale $f' = 2\text{m}$ et de foyer image O , un détecteur ponctuel enregistre l'éclairement aux points d'abscisse x , avec $x \ll f'$.

L'éclairement normalisé $E(x) / E_0$ enregistré par le détecteur est représenté ci-dessous.



- a) Faire un schéma du montage.
- b) A l'aide de la courbe représentant l'éclairement normalisé, déterminer a et d .
- c) Représenter la courbe obtenue si l'on divise d par 2, a restant constant.

Questions de cours

1- Pour l'oscillateur harmonique 1D de pulsation ω établir les identités suivantes :

(a) $[\hat{H}, \hat{b}^{\dagger}] = \hbar\omega \hat{b}^{\dagger}$; $[\hat{H}, \hat{b}] = -\hbar\omega \hat{b}$ (b) $\hat{H} \hat{b}^{\dagger} |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) \hat{b}^{\dagger} |n\rangle$; $\hat{H} \hat{b} |n\rangle = (E_n - \hbar\omega) \hat{b} |n\rangle$

2- Qu'appelle-t-on états de Glauber de l'oscillateur harmonique ?

3- Caractériser ces états en termes de incertitudes sur la position et l'impulsion de la particule.

4- Pourquoi dit-on qu'un état initialement cohérent reste un état de Glauber à tout instant ?

Partie I. Circuit électrique quantique : quantification canonique d'un oscillateur LC

On considère un circuit LC formé par l'assemblage en série d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C , aux bornes duquel règne la tension $e(t)$. Les variables dynamiques du circuit sont $Q(t)$ la charge de l'armature positive du condensateur et $\dot{Q}(t)$, le flux magnétique à travers la bobine. Pour étudier les oscillations libres du circuit, on charge le condensateur puis on l'insère dans le circuit bouclé sur lui-même ($e(t) = 0$).

1- Par l'analyse dimensionnelle du flux, vérifier que celui-ci s'exprime comme le rapport d'une action à une charge électrique.

2- Ecrire le lagrangien $Lag(Q, \dot{Q})$ du circuit et en déduire le moment conjugué de la charge électrique \hat{Q} .

3- En déduire l'équation régissant les oscillations libres du circuit. Que vaut la pulsation de résonance ω_0 du circuit ?

4- Calculer l'hamiltonien correspondant et vérifier que les équations précédentes déterminent bien un schéma hamiltonien.

5- Effectuer la quantification canonique du circuit LC libre.

6- Exprimer l'hamiltonien quantique du circuit en fonction des opérateurs $\hat{b} = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{2L\hbar\omega_0}} - i \sqrt{\frac{L\omega_0}{2\hbar}} \hat{Q}$ et son adjoint. Identifier ces opérateurs.

7- Déterminer l'état fondamental du circuit ainsi que les fluctuations de point zéro de la charge des armatures.

Partie II. Transitions quantiques d'un circuit LC : système à 2 niveaux couplé à une source classique sinusoïdale

Le circuit de la partie précédente est maintenant alimenté par une tension variable $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ traitée comme une source classique. Le circuit est initialement préparé dans l'état fondamental $|0\rangle$. On désire étudier la réponse du circuit à la tension sinusoïdale à l'aide d'un modèle simplifié traitant le circuit comme un système à 2 niveaux associé au sous-espace engendré par les états $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. L'évolution du circuit sera donc étudiée dans ce seul sous-espace et l'état quantique du circuit sera noté $\phi(t) = \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \end{pmatrix}$ celui-ci évoluant conformément à l'équation de Schrödinger,

$$\begin{bmatrix} i\hbar \frac{d\phi}{dt} \\ c_1 L c_0(0), c_1(0) \end{bmatrix} = \hat{H} \phi(t)$$

1- En explicitant le couplage du circuit à la source, montrer que l'hamiltonien prend la forme,

$$\hat{H}(t) = (\hat{b}^{\dagger} \hat{b} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0 + i \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega_0}} (\hat{b}^{\dagger} - \hat{b}) e(t)$$

2- Calculer les éléments de matrice suivants de l'hamiltonien précédent:

$$\langle 0 | \hat{H}(t) | 0 \rangle, \langle 1 | \hat{H}(t) | 1 \rangle, \langle 0 | \hat{H}(t) | 1 \rangle, \langle 1 | \hat{H}(t) | 0 \rangle.$$

3- En déduire que l'hamiltonien du système à 2 niveaux considéré admet, après un réajustement de l'origine des énergies que l'on précisera, la forme matricielle suivante,

$$\hat{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -ie(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega_0}} \\ ie(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega_0}} & \hbar \omega_0 \end{bmatrix}$$

4- Déduire de l'E-S dépendant du temps le système différentiel vérifié par les fonctions $c_0(t)$ et $c_1(t)$.

5- En posant $c_0(t) = \xi_0(t)$, $c_1(t) = e^{-i\omega_0 t} \xi_1(t)$ former le nouveau système auquel obéissent les nouvelles fonctions et montrer que celui-ci prend la forme matricielle suivante,

$$\begin{bmatrix} i\hbar \frac{d\xi_0}{dt} \\ i\hbar \frac{d\xi_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{e(t)}{\sqrt{2L\omega_0}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0(t) \\ \xi_1(t) \end{bmatrix}$$

6- Dans la limite d'une perturbation de faible amplitude ($e_m^2 C / \hbar \ll \omega_0$), la solution de ce système s'approxime au développement limité,

$$\begin{cases} \xi_0(t) = \xi_0(0) - \frac{1}{\sqrt{2hL\omega_0}} \int_0^t e^{i\tau} d\xi_1(0) + \dots \\ \xi_1(t) = \xi_1(0) + \frac{1}{\sqrt{2hL\omega_0}} \int_0^t e^{i\tau} e^{i\omega_0 \tau} d\xi_0(0) + \dots \end{cases}$$

Après avoir calculé les intégrales intervenant dans cette solution, exprimer l'état $\phi(t) = \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \end{pmatrix}$ du circuit correspondant aux conditions initiales spécifiées dans l'énoncé. On ne se souciera pas du problème posé par la normalisation de cet état.

7- En déduire la probabilité $P_1(t) = |c_1(t)|^2$ de trouver le circuit dans l'état $|1\rangle$ à l'instant t . Pour quelles valeurs de ω cette probabilité est-elle importante ? Interpréter qualitativement ce résultat et décrire l'effet de la perturbation sur le circuit.

Partie facultative

8- Sous l'effet de la tension sinusoidale alimentant le circuit, celui-ci subit des transitions entre l'état fondamental et le 1^{er} état excité. Le taux de transition (probabilité de transition par unité de temps) correspondant est donné, aux temps longs par la limite, $\varpi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|c_1(t)|^2}{t}$. En vous appuyant sur les informations fournies dans le Nota Bene, montrer que ce taux vaut,

$$\varpi = \frac{e^2}{8hL\omega_0} \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

- 9- A quels types de processus peut-on relier les deux termes contribuant au taux de transition ?
 10- Que représente le temps caractéristique $1/\varpi$?

Nota Bene.

On donne la valeur de la limite suivante : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(xt)}{\pi x^2 t} = \delta(x)$

Astrophysique

Juin 2022

L'étudiant choisira librement l'un des 2 énoncés qui suivent et le traitera complètement.



Exercice 7. Variations de la densité de matière au sein de la Terre.

La Terre est assimilée à un corps sphérique homogène (densité constante) dont la circonférence du grand cercle est de l'ordre de 40000 km. On admettra le théorème de Newton : Dans le cas d'une distribution de matière à symétrie sphérique, le champ (ou le potentiel) gravitationnel créé par celle-ci en tout point situé à une distance r du centre (intérieur ou extérieur à la distribution) est le même que celui créé par un corps ponctuel de même masse localisé au centre de la distribution.

- a- Estimer la masse volumique moyenne ρ_m de la Terre.
- b- On suppose maintenant que la Terre n'est pas homogène mais cependant à symétrie sphérique de masse volumique variant selon la loi, $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R_T^2}\right)$. Calculer les

paramètres ρ_0 et α de manière que la densité moyenne ait la valeur estimée à la question –a et que la densité de surface de la Terre $\rho(R_T) = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

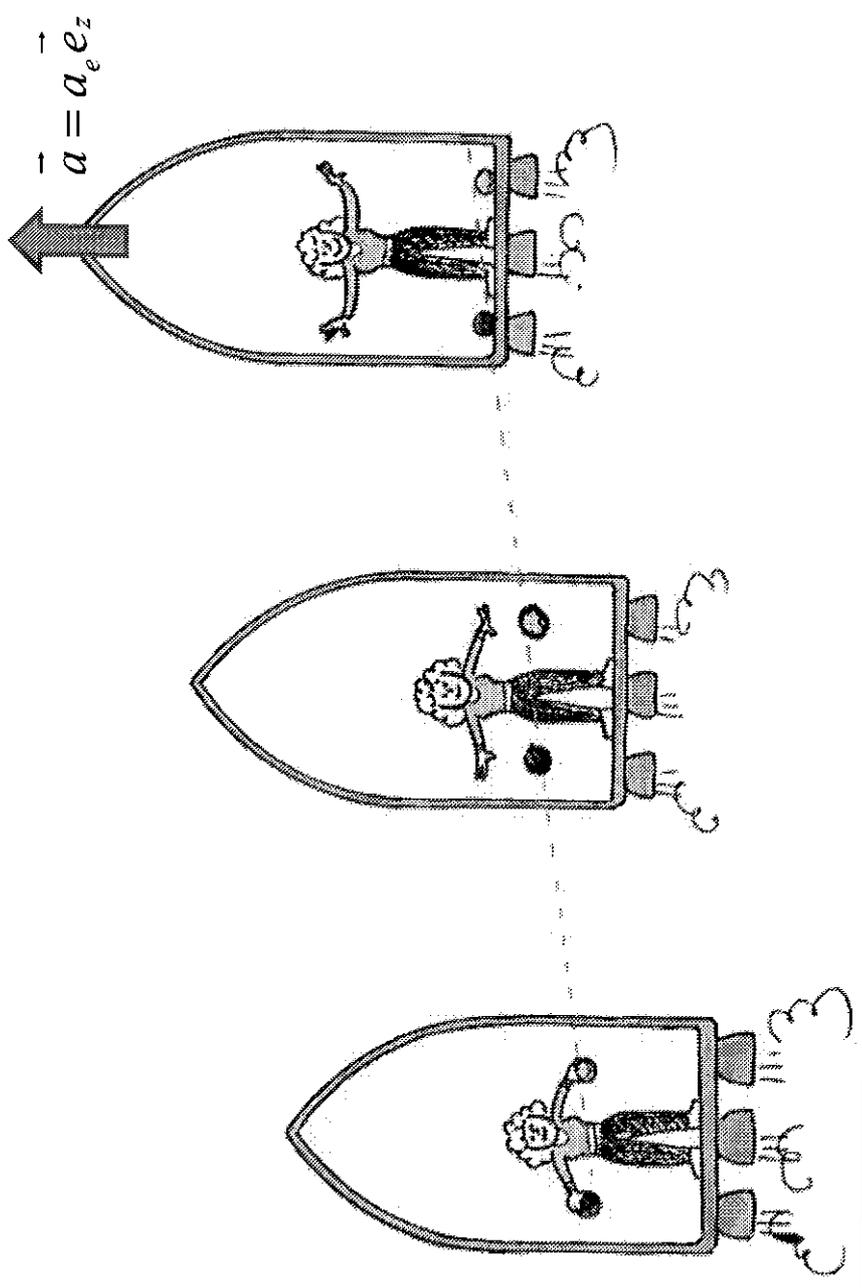
- c- Calculer la loi de variation de l'intensité $g(r)$ de la pesanteur en fonction de r à l'intérieur de la Terre. En introduisant la profondeur $x = R_T - r$, montrer que $g(x)$ passe par un maximum que l'on déterminera.

- d- En déduire le potentiel gravitationnel $\phi(r)$ correspondant.

- e- Pour $x \ll R_T$ calculer les variations relatives $(g(x) - g(0)) / g(0)$ en fonction des données.

Application : Calculer g au fond d'un puits de mine de 2 km de profondeur.

- 1- Quelle propriété fondamentale de la gravitation de la gravitation les dessins ci-dessous illustrent-ils? On citera en particulier le principe fondamental auquel renvoie cette situation.
- 2- On désire déterminer le mouvement des masses lâchées par l'observateur. Sachant qu'aucun champ de gravitation extérieur n'est présent, mettre en équation la situation en se plaçant dans le référentiel de la fusée.
- 3- Décrire le mouvement des masses.
- 4- A quelle autre situation physique celle observée ici est-elle alors équivalente?



Astrophysique (partie 2 sur 1h)

Examen de rattrapage du 13 juin 2022 13h-15h

Exercice 1 (2.5 points)

Deux étoiles C et D situées à la même distance de nous, brillent avec un rapport entre leurs éclats apparents respectifs $E_C/E_D = 1.2$. Leurs températures effectives respectives sont de $T_C = 5000$ K et $T_D = 6000$ K. Quel est leur rapport de rayons R_C/R_D ?

Exercice 2 (2.5 points)

Une comète est un astre d'un diamètre de 10 km environ. Soit la résolution d'un instrument optique telle qu'un objet de $0.5''$ d'arc est encore observable. Quelle est la distance minimale à laquelle doit se trouver la comète pour qu'un observateur puisse la détecter avec cet instrument ?

Exercice 23 (3 points)

Une étoile a une magnitude absolue M de 3 et se trouve à 30 parsec. Quelle serait sa magnitude apparente si elle se trouvait à 30 parsecs ?

Questions de cours (2 points)

1) Pour chacune des quatre valeurs de magnitude apparente :

a) -26,7, b) -12,7, c) -1,4, d) 6,

associer l'astre correspondant à cette valeur : Lune, étoile à la limite de perception à l'œil nu, Sirius, Soleil.

2) Quels équilibres stellaires déterminent le fonctionnement d'une étoile ?

Rappels de cours :

Loi de Pogson : $m_1 - m_2 = -2.5 \log(E_1/E_2)$

La luminosité d'une étoile est le produit de sa surface et de sa densité de puissance surfacique de rayonnement (loi de Stefan Boltzmann)