

3 L'arbre de Steiner et le voyageur de commerce

Nous présentons dans ce chapitre des algorithmes d'approximation pour deux problèmes fondamentaux : l'arbre de Steiner métrique et le voyageur de commerce métrique. Les études des cas métriques de ces deux problèmes ont des justifications différentes. Pour l'arbre de Steiner, c'est le cœur du problème – le problème général se réduit au cas métrique. Le problème du voyageur de commerce, quant à lui, n'admet aucune approximation garantie sans cette restriction, à moins que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Nous présentons ces deux problèmes ensemble car les algorithmes et leurs analyses sont similaires.

3.1 L'arbre de Steiner métrique

Le problème de l'arbre de Steiner a été formalisé par Gauss dans une lettre (reproduite en couverture) qu'il écrivit à Schumacher. Aujourd'hui, ce problème occupe une place centrale en algorithmique d'approximation. Il a de très nombreuses applications, allant du réseau d'interconnexions de longueur minimale entre les différents éléments d'un circuit VLSI, à la construction d'arbres phylogéniques en bioinformatique. Ce problème et ses généralisations sont étudiés de façon approfondie dans ce livre (voir chapitres 22 et 23).

Problème 3.1 (Arbre de Steiner)¹ Étant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$ muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes, et dont les sommets sont étiquetés *requis* ou *Steiner*, trouver l'arbre coût minimum dans G qui contienne tous les sommets étiquetés requis et n'importe quel sous-ensemble des sommets étiquetés Steiner.

Nous allons commencer par démontrer que le cœur du problème est sa restriction au cas où la fonction de coût sur les arêtes vérifie l'*inégalité triangulaire*, c'est-à-dire le cas où G est un graphe complet et que pour tout triplet de sommets u, v , et w , $\text{coût}(uv) \leq \text{coût}(uw) + \text{coût}(vw)$. Nous appellerons cette restriction, le problème de l'*arbre de Steiner métrique*.

Théorème 3.2 *Il existe une réduction isofacteur du problème de l'arbre de Steiner à celui de l'arbre de Steiner métrique.*

¹ *Steiner tree*, en anglais.

Preuve : Transformons, en temps polynomial, toute instance I du problème l'arbre de Steiner sur un graphe $G = (V, E)$, en une instance I' du problème de l'arbre de Steiner métrique. Soit G' le graphe non orienté complet construit sur les sommets de V . Nous donnons pour coût à chaque arête uv de G celui du plus court chemin entre u et v dans G . G' s'appelle la *fermeture métrique*² de G . Les sommets de V sont étiquetés de la même façon dans I' que dans I .

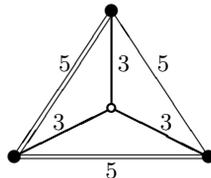
Remarquons que toute arête $uv \in E$ a un coût inférieur (ou égal) dans G' à celui dans G . Ainsi, le coût d'une solution optimale de I' est inférieur (ou égal) à celui d'une solution optimale de I : $\text{OPT}' \leq \text{OPT}$.

Démontrons maintenant comment obtenir, en temps polynomial, un arbre de Steiner T pour I à partir d'un arbre de Steiner T' de I' , et dont le coût soit au plus celui de T' . Le coût de chaque arête uv de G' correspond au coût d'un chemin dans G . Remplaçons chaque arête de T' par son chemin correspondant dans G . Nous obtenons ainsi un sous-graphe de G . Tous les sommets étiquetés requis sont bien connectés dans ce sous-graphe. Cependant, ce sous-graphe peut contenir des cycles. Si tel est le cas, nous en ôtons des arêtes jusqu'à obtenir un arbre T . La réduction ainsi décrite est bien isofacteur, car $\frac{\text{coût}(T)}{\text{OPT}} \leq \frac{\text{coût}(T')}{\text{OPT}'}$ (et donc $\text{OPT}' = \text{OPT}$). \square

Un corollaire du théorème 3.2 est que toute approximation garantie pour un facteur donné pour l'arbre de Steiner métrique produit la même garantie dans le cas général.

3.1.1 Approximation fondée sur l'arbre couvrant de poids minimum

Notons R , l'ensemble des sommets étiquetés requis. Un arbre couvrant de poids minimum (en abrégé, MST)³ du sous-graphe induit par R est évidemment une solution réalisable du problème. Étant donné que le problème du MST est dans **P** et que celui de l'arbre de Steiner est **NP**-difficile, on ne peut espérer que le MST des sommets de R correspond toujours à un arbre de Steiner optimal ; l'exemple ci-dessous présente un MST (arêtes dédoublées) de coût strictement supérieur à l'optimal (en gras).



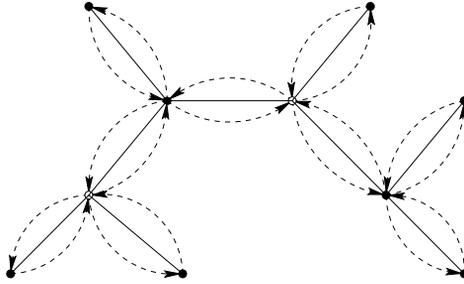
Cependant, un MST des sommets de R ne peut pas être beaucoup plus cher qu'un arbre de Steiner optimal :

² *Metric closure*, en anglais.

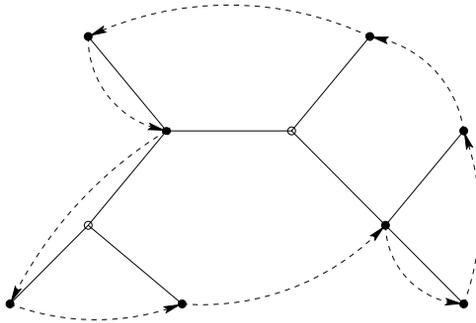
³ *Minimum spanning tree (MST)*, en anglais.

Théorème 3.3 *Le coût d'un MST du sous-graphe induit par les sommets de R est inférieur à $2 \cdot \text{OPT}$.*

Preuve : Prenons un arbre de Steiner optimal. En dédoublant toutes ses arêtes, nous obtenons un graphe eulérien connectant tous les sommets de R , et éventuellement quelques sommets étiquetés Steiner. Construisons un cycle eulérien de ce graphe, par exemple, en parcourant en profondeur ses arêtes :



Le coût du cycle eulérien est $2 \cdot \text{OPT}$. Construisons ensuite un cycle hamiltonien des sommets de R en parcourant le cycle eulérien et en court-circuitant⁴ les sommets étiquetés Steiner ainsi que les sommets de R déjà visités :

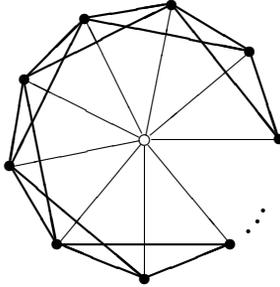


Grâce à l'inégalité triangulaire, ces sauts n'augmentent pas le coût du cycle. En éliminant une arête du cycle hamiltonien, nous obtenons un chemin passant par tous les sommets de R et de coût inférieur à $2 \cdot \text{OPT}$. Ce chemin est un arbre couvrant de R . Un MST de R est donc nécessairement de coût inférieur à $2 \cdot \text{OPT}$. \square

Le théorème 3.3 décrit une 2-approximation directe pour le problème de l'arbre de Steiner métrique : calculer un MST des sommets étiquetés requis. De même que pour la couverture par ensembles, la « bonne » façon de voir cet algorithme est la théorie de la dualité en programmation linéaire. Nous verrons aux chapitres 22 et 23 que la dualité en programmation linéaire donne le minorant sur lequel cet algorithme est construit et aide à résoudre les généralisations de ce problème.

⁴ *Short-cutting*, en anglais.

Exemple 3.4 Le graphe suivant est une instance critique. Il a n sommets requis et un sommet Steiner. Les arêtes entre le sommet Steiner et un sommet requis coûtent 1 et les arêtes entre deux sommets requis coûtent 2 (toutes les arêtes de coût 2 ne sont pas représentées ci-dessous). Dans ce graphe, tout MST de R coûte $2(n - 1)$, alors que $\text{OPT} = n$.



□

3.2 Le voyageur de commerce métrique

Le problème suivant a été très étudié en optimisation combinatoire.

Problème 3.5 (Voyageur de commerce – TSP)⁵ Étant donné un graphe complet muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes, trouver un cycle de coût minimum passant par chaque sommet exactement une fois.

Dans toute sa généralité, on ne peut garantir aucune approximation pour TSP, à moins que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Théorème 3.6 *Quel que soit $\alpha(n)$ calculable en temps polynomial, il n'existe pas de $\alpha(n)$ -approximation pour TSP, à moins que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.*

Preuve : Par l'absurde, soit \mathcal{A} une $\alpha(n)$ -approximation (en temps polynomial) pour la version générale du TSP. Nous allons démontrer que \mathcal{A} permet de résoudre le problème \mathbf{NP} -difficile du cycle hamiltonien en temps polynomial, et donc que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

L'idée est de réduire le problème du cycle hamiltonien au TSP en transformant un graphe G à n sommets en un graphe complet G' à n sommets muni d'une fonction de poids sur les arêtes telle que :

- si G admet un cycle hamiltonien, alors le coût optimal du TSP dans G' est n , et
- si G n'admet pas de cycle hamiltonien, alors le coût optimal du TSP dans G' est $> \alpha(n) \cdot n$.

⁵ *Traveling salesman problem (TSP)*, en anglais.

Remarquons que, sur le graphe G' , l'algorithme \mathcal{A} calcule une solution de coût $\leq \alpha(n) \cdot n$ dans le premier cas, et $> \alpha(n) \cdot n$ dans le second. Ainsi, nous pouvons l'utiliser pour décider si G admet ou non un cycle hamiltonien.

La réduction est simple. Nous attribuons, dans G' , un coût de 1 aux arêtes également présentes dans G , et un coût de $\alpha(n) \cdot n$ aux autres. Ainsi, si G admet un cycle hamiltonien, le cycle correspondant dans G' coûte n . Et si G n'admet pas de cycle hamiltonien, tout cycle de G' passe nécessairement par une arête de coût $\alpha(n) \cdot n$, et donc coûte strictement plus que $\alpha(n) \cdot n$. \square

Remarquons que pour obtenir un résultat d'inapproximabilité aussi fort, nous avons dû assigner aux arêtes des coûts qui ne respectent pas l'inégalité triangulaire. Lorsque l'on se restreint aux graphes munis d'une fonction de coût métrique (qui respecte l'inégalité triangulaire), c'est-à-dire à TSP métrique, le problème reste **NP**-difficile, mais il n'est plus impossible d'en approcher la solution optimale.

3.2.1 Une 2-approximation facile

Commençons par présenter une 2-approximation facile. Le minorant que nous utiliserons est le coût d'un MST de G . C'est bien un minorant car on obtient un arbre couvrant de G en ôtant une arête d'une solution optimale du TSP.

Algorithme 3.7 (TSP métrique – 2-approximation)

1. Calculer un MST, T , de G .
2. Dupliquer toutes les arêtes du MST pour obtenir un graphe eulérien.
3. Calculer un cycle eulérien \mathcal{T} de ce graphe.
4. Renvoyer le cycle \mathcal{C} qui passe par tous les sommets de G dans l'ordre de leur première occurrence dans \mathcal{T} .

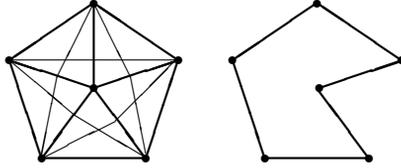
Remarquons que la quatrième étape est la même que les « court-circuitages » de sommets dans la preuve du théorème 3.3.

Théorème 3.8 *L'algorithme 3.7 est une 2-approximation pour le TSP métrique.*

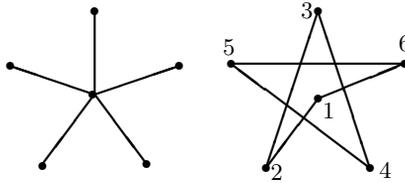
Preuve : Nous l'avons vu ci-dessus, $\text{coût}(T) \leq \text{OPT}$. Puisque \mathcal{T} contient chaque arête de T en double, $\text{coût}(\mathcal{T}) = 2 \cdot \text{coût}(T)$. Par l'inégalité triangulaire, après la quatrième étape, $\text{coût}(\mathcal{C}) \leq \text{coût}(\mathcal{T})$. Ces deux inégalités permettent de conclure que $\text{coût}(\mathcal{C}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$. \square

Exemple 3.9 Voici une instance critique pour cet algorithme. C'est un graphe complet à n sommets dont les arêtes coûtent 1 ou 2. La figure ci-dessous représente le graphe pour $n = 6$ (les arêtes de coût 1 sont dessinées

en gras, les autres coûtent 2). Pour un n quelconque, ce graphe a $2n - 2$ arêtes de coût 1, formant l'union d'une étoile et d'un cycle de longueur $n - 1$; les autres arêtes coûtent 2. Le TSP optimal coûte n :



Supposons que le MST trouvé par l'algorithme soit l'étoile couvrante constituée d'arêtes de coût unitaire. Supposons également que le cycle eulérien calculé à la troisième étape passe par les sommets dans l'ordre ci-dessous (pour le cas $n = 6$) :



Alors, le cycle obtenu après la quatrième étape contient $n - 2$ arêtes de coût 2 pour un coût total de $2n - 2$. C'est asymptotiquement le double du cycle TSP optimal. \square

3.2.2 Amélioration du facteur d'approximation à $3/2$

L'algorithme 3.7 commence par calculer un cycle eulérien de faible coût des sommets de G , puis court-circuite ce cycle pour trouver un cycle de voyageur de commerce. Peut-on trouver un cycle eulérien plus économique, de coût inférieur au double du coût du MST? Rappelons qu'un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. Ainsi, nous ne devons donc nous occuper que des sommets de degré impair du MST. Notons V' l'ensemble de ces sommets. Il n'existe qu'un nombre pair de sommets de degré impair car la somme des degrés des sommets d'un graphe est pair (c'est le double du nombre d'arêtes). Ainsi $|V'|$ est pair. Si nous ajoutons au MST un couplage parfait de coût minimum sur V' , tous les sommets auront degré pair, et nous aurons notre graphe eulérien. Cette amélioration conduit à $3/2$ -approximation.

Algorithme 3.10 (TSP métrique – 3/2-approximation)

1. Calculer un MST de G , noté T .
2. Calculer un couplage parfait M de coût minimum du sous-graphe induit par les sommets de degré impair de T . Ajouter M à T pour obtenir un graphe eulérien.
3. Calculer un cycle eulérien \mathcal{T} de ce graphe.
4. Renvoyer le cycle \mathcal{C} qui passe par les sommets de G dans l'ordre de leur première occurrence dans \mathcal{T} .

Remarquons que l'évaluation des performances de cet algorithme repose sur un autre minorant de OPT.

Lemme 3.11 Soient $V' \subseteq V$, avec $|V'|$ pair, et M un couplage parfait de coût minimum de V' . Alors $\text{coût}(M) \leq \text{OPT}/2$.

Preuve : Soit γ le cycle TSP optimal de G . Soit γ' le cycle de V' obtenu à partir de γ en court-circuitant les sommets de $V \setminus V'$. Par l'inégalité triangulaire, $\text{coût}(\gamma') \leq \text{coût}(\gamma)$. Comme $|V'|$ est pair, γ' est l'union de deux couplages parfaits de V' . Par conséquent, le moins cher de ces deux couplages a un coût $\leq \text{coût}(\gamma')/2 \leq \text{OPT}/2$. Le couplage de coût minimum coûte donc moins que $\text{OPT}/2$. □

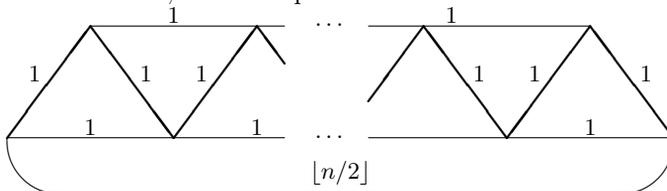
Théorème 3.12 L'algorithme 3.10 est une 3/2-approximation pour le TSP métrique.

Preuve : Les deux minorants de OPT impliquent que le coût du cycle eulérien est majoré par :

$$\text{coût}(\mathcal{T}) \leq \text{coût}(T) + \text{coût}(M) \leq \text{OPT} + \frac{1}{2} \text{OPT} = \frac{3}{2} \text{OPT}$$

L'inégalité triangulaire permet de conclure car $\text{coût}(\mathcal{C}) \leq \text{coût}(\mathcal{T})$. □

Exemple 3.13 Le graphe suivant est une instance critique pour cet algorithme. Il a n sommets, avec n impair :



Le MST trouvé à la première étape est représenté par des arêtes en gras. Ce MST n'a que deux sommets de degré impair. En ajoutant l'arête qui les joint,

on obtient un parcours pour le voyageur de commerce de coût $(n-1) + \lfloor n/2 \rfloor$. Or, le cycle optimal ne coûte que n . \square

La recherche d'une meilleure approximation pour le TSP métrique est actuellement l'un des problèmes ouverts les plus importants du domaine. De nombreux chercheurs conjecturent qu'une approximation de facteur $4/3$ est sans doute possible.

3.3 Exercices

3.1 La difficulté du problème de l'arbre de Steiner est de déterminer quel est le sous-ensemble optimal de sommets étiquetés Steiner à inclure dans l'arbre. Démontrez que si cet ensemble est donné, alors l'arbre de Steiner optimal se calcule en temps polynomial.

Indication : Recherchez un MST de l'union de cet ensemble et des sommets étiquetés requis.

3.2 Considérons un graphe $G = (V, E)$ muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes, et deux sous-ensembles disjoints de V : \mathcal{E} , les *expéditeurs* et \mathcal{D} , les *destinataires*. Le problème est de trouver un sous-graphe de G de coût minimal tel que tout destinataire est relié par un chemin à l'un des expéditeurs (n'importe lequel). Séparons les instances en deux catégories : $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} = V$ et $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} \neq V$. Démontrez que ces deux cas sont respectivement dans **P** et **NP**-difficile. Proposez une 2-approximation pour le second cas.

Indication : Ajoutez un sommet supplémentaire relié à chaque expéditeur par une arête de coût nul. Étiquetez requis le nouveau sommet ainsi que tous les destinataires, puis Steiner les autres. Recherchez un arbre de Steiner de coût minimum.

3.3 Donnez une réduction isofacteur du problème de la couverture par ensembles au problème suivant — démontrant ainsi qu'il est improbable de trouver une approximation de facteur meilleur que $O(\log n)$.

Problème 3.14 (Arborescence de Steiner)⁶ Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni d'une fonction de coût positive sur les arêtes. Les sommets sont tous étiquetés *requis* ou *Steiner*. Un des sommets requis, r , est distingué. Le problème consiste à trouver une arborescence enracinée en r de coût minimal, qui contient tous les sommets requis et un sous-ensemble quelconque des sommets Steiner.

Indication : Construisez un graphe à trois couches : la première contient un sommet requis pour chaque élément de l'instance de la couverture par sommets ; la seconde contient un sommet Steiner pour chacun des sous-ensembles ; et la troisième contient r .

⁶ *Directed Steiner tree*, en anglais.

3.4 (Hoogeveen [138]) Étudions des variantes du TSP métrique dans lesquelles il s'agit de trouver un chemin simple passant par tous les sommets du graphe. Trois problèmes différents se posent suivant que l'on fixe aucune, une ou deux des extrémités du chemin. Proposez des algorithmes ayant les garanties suivantes pour chacun des cas :

- si zéro ou une des extrémités est fixée, donnez une $3/2$ -approximation ;
- si les deux extrémités sont fixées, donnez une $5/3$ -approximation.

Indication : Inspirez-vous de l'algorithme 3.10.

3.5 (Papadimitriou et Yannakakis [228]) Soit G un graphe non orienté complet dont toutes les arêtes sont de longueur 1 ou 2 (G vérifie alors clairement l'inégalité triangulaire). Proposez une $4/3$ -approximation pour le TSP sur cette classe de graphes.

Indication : Commencez par trouver un 2-facteur minimal de G . Un 2-facteur⁷ est un sous-ensemble S d'arêtes tel que chaque sommet est incident à exactement deux arêtes de S .

3.6 (Frieze, Galbiati, and Maffioli [96]) Donnez une $O(\log n)$ -approximation pour le problème suivant.

Problème 3.15 (TSP asymétrique)⁸ Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ muni d'une fonction de coût sur les arcs satisfaisant l'*inégalité triangulaire orientée*, c'est-à-dire telle que pour tout triplet de sommets u, v , et w , $\text{coût}(u \rightarrow v) \leq \text{coût}(u \rightarrow w) + \text{coût}(w \rightarrow v)$. Le problème consiste à trouver un cycle de coût minimal qui passe par chacun des sommets exactement une fois.

Indication : Utilisez le fait qu'on peut calculer en temps polynomial une couverture par cycles de coût minimal (c'est-à-dire des cycles disjoints qui couvrent tous les sommets). Réduisez les cycles à un point et itérez.

3.7 Soient $G = (V, E)$ un graphe muni d'une fonction de coût sur les arêtes vérifiant l'inégalité triangulaire, et $V' \subset V$ un sous-ensemble de taille paire. Prouvez ou infirmez le fait suivant : « le coût minimum d'un couplage parfait sur V' est majoré par le coût minimum d'un couplage parfait V ».

3.8 Étant donné n points dans \mathbf{R}^2 , nous appelons arbre de Steiner optimal, un arbre de longueur totale minimale qui atteint ces n points en passant pour cela par n'importe quels autres points du plan. Démontrez que le degré de chacun des points additionnels vaut 3, et que leurs arêtes incidentes forment des angles à 120° .

3.9 (Rao, Sadayappan, Hwang, and Shor [239]) Cet exercice construit une 2-approximation pour le problème suivant.

⁷ *2-Matching*, en anglais.

⁸ *Asymmetric TSP*, en anglais.

Problème 3.16 (Arborescence de Steiner rectilinéaire)⁹ Considérons n points p_1, \dots, p_n du quadrant positif du plan \mathbf{R}^2 . On dit qu'un chemin de l'origine à p_i est *monotone* s'il est composé de segments parallèles aux axes x et y dans le sens positif (de manière informelle, allant vers l'est ou vers le nord). Le problème est de trouver un arbre de longueur minimale constitué de chemins monotones partant des n points; un tel arbre est appelé une *arborescence de Steiner rectilinéaire*.

Pour tout point p , nous notons (x_p, y_p) ses coordonnées et $|p|_1 = |x_p| + |y_p|$. Nous dirons qu'un point p *domine* un point q si $x_p \leq x_q$ et $y_p \leq y_q$. Étant donné deux ensembles de points A et B , nous dirons que A *domine* B si pour tout point $b \in B$, il existe un point $a \in A$ qui domine b . Étant donné deux points p et q , le *dominateur* de p et q est le point $\text{dom}(p, q) = (x, y)$, avec $x = \min(x_p, x_q)$ et $y = \min(y_p, y_q)$. Lorsque p domine q , on note $\text{segments}(p, q)$ un chemin monotone arbitraire de p à q . Voici l'algorithme.

Algorithme 3.17 (Arborescence de Steiner rectilinéaire)

1. $T \leftarrow \emptyset$.
2. $P \leftarrow \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{(0, 0)\}$.
3. Tant que $|P| > 1$ faire :
 - Trouver des points $p, q \in P$, $p \neq q$, qui maximisent $|\text{dom}(p, q)|_1$.
 - $P \leftarrow (P - \{p, q\}) \cup \{\text{dom}(p, q)\}$.
 - $T \leftarrow T \cup \text{segments}(\text{dom}(p, q), p) \cup \text{segments}(\text{dom}(p, q), q)$.
4. Renvoyer T .

Pour tout $z \geq 0$, notons ℓ_z la droite d'équation $x + y = z$. Pour toute arborescence de Steiner T , soit $T(z) = |T \cap \ell_z|$, le nombre de points à l'intersection de T et ℓ_z . Démontrez que la longueur de T est :

$$\int_{z=0}^{\infty} T(z) \, dz$$

Pour tout $z \geq 0$, posons $P_z = \{p \in P : |p|_1 > z\}$, et

$$N(z) = \min\{|C| : C \subset \ell_z \text{ et } C \text{ domine } P_z\}.$$

⁹ *Rectilinear Steiner arborescence*, en anglais.

Démontrez que

$$\int_{z=0}^{\infty} N(z) dz$$

est un minorant de OPT.

En conclure que l'algorithme 3.17 est une 2-approximation.

3.10 (I. Măndoiu) Cet exercice construit une 9-approximation pour le problème suivant, dont une application est le routage d'horloge VLSI.

Problème 3.18 (Arbre rectilinéaire isochrone) Étant donné un ensemble S de points du plan rectilinéaire (c'est-à-dire muni de la norme ℓ_1), trouver un *arbre isochrone*¹⁰ (ZST) de S , de longueur minimum, c'est-à-dire une arborescence T du plan rectilinéaire dont les feuilles sont les points de S et dont tous les chemins de la racine à une feuille ont la même longueur. Nous entendons par *longueur d'un chemin*, la somme des longueurs de ses arêtes.

1. Soient T un arbre isochrone et R' la longueur commune des chemins de la racine aux feuilles. Pour tout $r \geq 0$, notons $T(r)$ le nombre de points de T qui sont à distance $R' - r$ de la racine (dans l'arbre). Démontrez que la longueur de T est :

$$\int_0^{R'} T(r) dr.$$

2. On appelle boule ℓ_1 fermée de rayon r centrée en p l'ensemble des points dont la distance ℓ_1 de p est $\leq r$. Soit R le rayon de la plus petite boule ℓ_1 fermée qui contient tous les points de S . Pour tout $r \geq 0$, notons $N(r)$ le nombre minimal de boules ℓ_1 fermées de rayon r nécessaires pour couvrir tous les points de S . Démontrez que

$$\int_0^R N(r) dr$$

est un minorant de la longueur d'un ZST optimum.

3. Le principe de l'algorithme est le suivant. Calculer R et trouver une boule ℓ_1 fermée de rayon R qui couvre les points de S . Le centre de cette boule sera la racine du ZST. Cette boule est découpée en quatre boules, nommées ses *quadrants*, de rayon $R/2$ chacune. La racine est connectée aux centres de chacune de ces boules par une arête de longueur $R/2$. Chacune de ces boules est ensuite découpée en quatre nouvelles boules de rayon $R/4$, ainsi de suite.

¹⁰ *Zero-skew tree (ZST)*, en anglais.

L'algorithme construit le ZST récursivement en commençant par la boule de rayon R . Le centre de la boule courante est connecté aux centres de chacun de ses quadrants qui couvre (au moins) un point de S . L'algorithme itère récursivement sur chacun des quadrants. Si la boule courante couvre exactement un point de S , la récursion s'arrête et la boule n'est pas découpée. Soient r' le rayon de cette boule, c son centre et p le point de S qu'elle couvre. Clairement, la distance ℓ_1 de c à p est $\leq r'$. On connecte alors c à p par un chemin rectilinéaire de longueur r' exactement.

Démontrez que l'arbre obtenu est bien isochrone, puis que $T(r) \leq 9N(r)$, pour tout $0 \leq r \leq R$. En déduire que cet algorithme est une 9-approximation.

3.4 Notes

Le problème de l'arbre de Steiner a ses origines dans un problème posé par Fermat. Il fut formalisé le 21 mars 1836 par Gauss dans une lettre adressée à son étudiant Schumacher. Des extraits de cette lettre sont reproduits sur la couverture de ce livre. Courant et Robbins [58] popularisèrent ce problème sous le nom de Steiner, un géomètre célèbre du dix-neuvième siècle. Nous renvoyons à Hwang, Richards, et Winter [141] et Schreiber [245] pour la fascinante histoire de ce problème.

La 2-approximation du problème de l'arbre de Steiner fut découverte indépendamment par Choukhmane [47], Iwainsky, Canuto, Taraszow et Villa [144], Kou, Markowsky et Berman [185], et Plesník [230]. La 3/2-approximation pour le TSP métrique est due à Christofides [48], et le théorème 3.6 à Sahni et Gonzalez [241]. Le minorant de l'exercice 3.10 fut proposé par Charikar, Kleinberg, Kumar, Rajagopalan, Sahai et Tomkins [43]. La meilleure approximation connue pour le problème l'arbre rectilinéaire isochrone, une 3-approximation, est due à Zelikovsky et Mandoiu [273].

Étant donné n points du plan euclidien, l'arbre couvrant de poids minimum est à un facteur $2/\sqrt{3}$ du coût optimal de l'arbre de Steiner (qui est autorisé à utiliser n'importe quel point du plan comme point Steiner). Ceci fut démontré par Du et Hwang [68], fermant ainsi une conjecture de Gilbert et Pollak [107].