TD 7-8 : Logique du Premier Ordre

Stéphane Devismes

2 avril 2025

Exercices à faire absolument : 1, 3, 5, 7, 10, 12 et 15.

Exercice 1 (Structure et variables libres)**.**
Pour chaque formule ci-dessous, indiquer sa structure en arbre, sa forme stricte et ses variables libres.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(x,y))$.
2. $\forall a \forall b(b \neq 0 \Rightarrow \exists q \exists r(a = b * q + r \wedge r < b))$ [1].
3. $Pair(x) \Leftrightarrow \exists y(x = 2 * y)$.
4. $x \ Divise \ y \Leftrightarrow \exists z(y = z * x)$.
5. $Premier(x) \Leftrightarrow \forall y(y \ Divise \ x \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$.

□

Exercice 2 (Formalisation, symbole de fonction et de relation)**.** *Nous considérons* $\Sigma = \{f^{r2}, o^{r2}, c^{r2}, j^{r2}, r^{f0}, p^{f1}\}$ *la signature ayant la sémantique donnée ci-dessous.*

— $f(x,y)$: *x est frère de y.*
— $o(x,y)$: *x est l'oncle de y.*
— $c(x,y)$: *x est le cousin de y.*
— $j(x,y)$: *x est plus jeune que y.*
— *r est le diminutif de Robert.*
— *$p(x)$ est le père de x.*

Exprimer en logique du premier ordre et en utilisant la signature Σ les phrases suivantes :

1. *Tout frère du père de Robert est un oncle de Robert.*
2. *Si les pères de deux enfants sont des frères alors ces deux enfants sont des cousins.*
3. *Robert a un cousin plus jeune qu'un des frères de Robert.*

Exprimer en français les propositions logiques suivantes :

1. $\nexists x \ j(p(x), x)$
2. $\forall x \forall y(p(p(x)) = p(p(y)) \Rightarrow c(x,y))$
3. $\forall x \exists y(f(x,y) \wedge j(x,y))$
4. $\exists x \exists y(f(x,y) \wedge \neg(p(x) = p(y)))$

□

Exercice 3 (Formalisation)**.** *Considérons la signature* $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f0}, J^{r2}, G^{r2}\}$*, où les symboles ont le sens donné ci-dessous.*

— a : *l'équipe d'Allemagne.*
— f : *l'équipe de France.*
— $J(x,y)$: *x a joué un match contre y.*
— $G(x,y)$: *x a gagné contre y.*

Exprimer en logique du premier ordre en utilisant la signature Σ les assertions suivantes :

1. *L'équipe de France a gagné un match et en a perdu un.*
2. *L'équipe de France et l'équipe d'Allemagne ont fait match nul.*
3. *Une équipe a gagné tous ses matchs.*

---

1. Afin de respecter la notation usuelle pour la division euclidienne nous prenons exceptionnellement a, b, q et r comme nom de variable.

4. *Aucune équipe n'a perdu tous ses matchs.*
5. *Considérons l'assertion suivante : « Tous ceux qui ont joué contre une équipe qui a gagné tous ses matchs, ont gagné au moins un match ». Parmi les formules suivantes, lesquelles expriment la phrase ci-dessus, et lesquelles sont équivalentes ?*
   (a) $\forall x \exists y\, (J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (b) $\forall x(\exists y\, (J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (c) $\exists x(\forall y\, (J(x, y) \Rightarrow G(x, y)) \Rightarrow \forall z(J(x, z) \Rightarrow \exists v G(x, v)))$.
   (d) $\forall x \forall y\, (J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \Rightarrow G(y, z)) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.
   (e) $\forall x(\forall y\, (J(x, y) \wedge \forall z(J(y, z) \Rightarrow G(y, z))) \Rightarrow \exists v G(x, v))$.

□

Exercice 4 (Formaliser,**)**.** *Soient les constantes s pour Serge, t pour Tobby et les symboles de relation $A(x, y)$, x aime y, $C(x)$, x est un chien, $D(x)$, x est un animal domestique, $E(x)$, x est un enfant, $O(x)$, x est un oiseau et $P(x, y)$, x a peur de y, donner la signature Σ associée à ces symboles. Formaliser en logique du premier ordre en utilisant Σ les énoncés suivants :*

1. *Les chiens et les oiseaux sont des animaux domestiques.*
2. *Tobby est un chien qui aime les enfants.*
3. *Les oiseaux n'aiment pas les chiens.*
4. *Serge aime tous les animaux domestiques sauf les chiens.*
5. *Tous les enfants n'ont pas peur des chiens.*
6. *Certains chiens aiment les enfants.*
7. *Certains chiens aiment les enfants et réciproquement.*
8. *Les enfants aiment certains chiens.*

□

Exercice 5 (Évaluer des prédicats unaires)**.** *Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0, 1\}$ telle que $P_I = \{0\}, Q_I = \{1\}$.*

1. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x P(x)$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.*
2. *Les formules $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ sont-elles équivalentes ?*
3. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\exists x P(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.*
4. *Les formules $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ et $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ sont-elles équivalentes ?*
5. *Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ et $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$.*
6. *Les deux formules $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ et $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)$ sont-elles équivalentes ?*

□

Exercice 6 (Interprétation,*)**.** *Nous donnons les formules suivantes :*

1. $\forall x \exists y(y = x + 1)$.
2. $\exists y \forall x(y = x + 1)$.
3. $\forall x \exists y(y = x + 1) \Rightarrow \exists y \forall x(y = x + 1)$.
4. $\forall x \exists y(x = y + 1)$.
5. $\exists x \forall y(y = x + y)$.
6. $\exists x(x \neq 0 \wedge x + x = x)$.

Nous donnons les interprétations suivantes :

1. *I1 est l'algèbre de Boole sur $\{0, 1\}$.*
2. *I2 est l'arithmétique usuelle sur les entiers naturels.*
3. *I3 est l'arithmétique usuelle sur les entiers relatifs.*
4. *I4 est l'algèbre de Boole de domaine $\mathcal{P}(X)$ où les constantes 0 et 1 dénotent les ensembles $\emptyset$ et X et où l'addition est l'union d'ensembles.*

Indiquer si ces interprétations sont des modèles ou des contre-modèles des formules ci-dessus. □

Exercice 7 (Prédicat unaire et égalité)**.** *Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0,1,2\}$ telle que : $P_I = \{0,1\}, Q_I = \{1,2\}, R_I = \{\}$. Évaluer dans cette interprétation les formules suivantes :*

1. $\exists x R(x)$.
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.
4. $\forall x(R(x) \Rightarrow Q(x))$.
5. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow x = y))$ [2].
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow x = y))$.

□

Exercice 8 (Évaluation, égalité)**.** *Nous utilisons le symbole de fonction unaire f et la constante a. Nous abrégeons $\neg(x = y)$ en $x \neq y$. Soient I_1, I_2 les interprétations suivantes de domaine $\{0,1,2\}$: $a_{I_1} = a_{I_2} = 0$.*

x	$f_{I_1}(x)$	$f_{I_2}(x)$
0	0	1
1	0	2
2	2	0

Dans l'interprétation I_1 puis dans I_2, évaluer les formules suivantes :

1. $f(a) = a$.
2. $f(f(a)) = a$.
3. $f(f(f(a)) = a$.
4. $\exists x(f(x) = x)$, *f a un point-fixe.*
5. $\forall x(f(f(f(x))) = x)$.
6. $\forall y \exists x(f(x) = y)$, *$f$ est surjective.*
7. $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$, *$f$ est injective.*
8. $\neg(\exists x \exists y(f(x) = f(y) \wedge x \neq y))$.

□

Exercice 9 (Formalisation et évaluation)**.** *Nous adoptons les notations suivantes :*

— *Anatoli, Boris, Catarina et Denka sont des constantes du domaine,*
— *$P(x)$ signifie que x a réussi son examen,*
— *$Q(x,y)$ signifie que x a téléphoné à y.*

Donner la signature associée à ces notations et traduire en formules les énoncés suivants :

1. *Quelqu'un a raté l'examen et n'a été appelé par personne.*
2. *Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été appelés.*
3. *Personne n'a appelé tous ceux qui ont réussi à l'examen.*
4. *Tous ceux qui ont appelé quelqu'un, ont appelé quelqu'un qui a réussi l'examen.*

Soit l'interprétation ayant pour domaine $D = \{0,1,2,3\}$. Anatoli, Boris, Catarina et Denka valent respectivement 0, 1, 2 et 3 dans l'interprétation. Anatoli et Boris sont des garçons et Catarina et Denka sont des filles. Dans cette interprétation seuls Boris et Catarina ont réussi l'examen, les garçons ont appelé les filles, Denka a appelé Boris, Catarina a appelé Denka et ce sont les seuls appels.

Nous demandons de définir formellement l'interprétation donnée ci-dessus, puis de donner la valeur des énoncés précédents dans cette interprétation.

Indication *: pour faciliter le calcul de la valeur, nous suggérons de dessiner l'interprétation en entourant les prénoms des personnes qui ont réussi leurs examens, et en mettant une flèche de x vers y si x a téléphoné à y.* □

Exercice 10 (Expansion et contre-modèle)**.** *Trouver, par la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes :*

1. $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

---

2. Cette formule signifie qu'il y a un et un seul élément vérifiant P.

2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \exists x Q(x)$.
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$.
4. $(\exists x F(x) \Rightarrow \exists x G(x)) \Rightarrow \forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$.
5. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists x R(x,x)$.
6. $\forall x \forall y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \Rightarrow \forall x R(x,x)$.

Indication *: il suffit de construire des 1 ou 2 expansions.* □

Exercice 11 (Raisonnement incorrect)**.** *Considérons les hypothèses suivantes :*

1. $\exists x P(x)$.
2. $\exists x Q(x)$.
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow R(x))$.

Montrer, en utilisant la méthode des expansions, qu'il est incorrect de déduire à partir de ces trois hypothèses la conclusion suivante : $\exists x R(x)$. □

Exercice 12 (Contre-modèles avec relation)**.** *Construire des contre-modèles des formules suivantes, où F est une relation :*

1. $\forall x \exists y(x = y) \Rightarrow \exists y \forall x(y = x)$.
2. $F(a) \wedge (a \neq b) \Rightarrow \neg F(b)$.
3. $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge x \neq y) \Rightarrow \forall x F(x)$.
4. $\forall x \forall y(F(x,y) \Rightarrow x = y) \Rightarrow \exists x F(x,x)$.

□

Exercice 13 (Contre-modèles avec fonction)**.** *Construire, en utilisant la méthode des expansions, des contre-modèles des formules suivantes, où f est une fonction et P une relation :*

1. $\forall y \exists x(f(x) = y)$.
2. $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
3. $\exists x \forall y(f(y) = x)$.
4. $\forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$.

□

Exercice 14 (Équivalences)**.** *Prouver que :*

1. $\neg \forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \neg P(y,x)$.
2. $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.
3. *La phrase « aucun malade n'aime les charlatans » a été traduite en logique du premier ordre par deux étudiants par les 2 formules suivantes :*
   — $\forall x \forall y((M(x) \wedge A(x,y)) \Rightarrow \neg C(y))$.
   — $\neg(\exists x(M(x) \wedge (\exists y(A(x,y) \wedge C(y)))))$.
   Montrer que ces étudiants disent la même chose, c'est-à-dire les deux formules associées aux traductions sont équivalentes.

□

Exercice 15 (Preuve,*)**.** *Prouver les deux équivalences suivantes du lemme 5.1 :*

— $\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$.
— $\exists x A \equiv \neg \forall x \neg A$.

Conseil *: utiliser les propriétés 1 et 2 du lemme 5.1.* □

Exercice 16 (Preuve)**.** *Nous savons que* $(\forall x(A \wedge B)) \equiv (A \wedge (\forall x B))$ *à la condition que x ne soit pas une variable libre de A. Montrer que cette condition est nécessaire en donnant une assignation qui donne des valeurs différentes aux deux formules* $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ *et* $P(x) \wedge (\forall x Q(x))$.

□