Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique

Logique du premier ordre

Première partie : Langage et Sens des Formules

Stéphane Devismes

Université de Picardie Jules Verne

11 février 2025

Structure de la logique du premier ordre

La **logique du premier ordre** permet de modéliser :

- **Un seul domaine non-vide** (peut-être plus que deux éléments)
- **Trois catégories :**
  - **Les termes** qui représentent les éléments du domaine ou des fonctions sur ces éléments
  - **Les relations** entre les éléments du domaine
  - **Les formules** qui décrivent les interactions entre les relations grâce aux connecteurs et aux quantificateurs

Remarque 4.1

Deux symboles (quantificateurs) particuliers : $\forall$ (quantificateur universelle) et $\exists$ (quantificateur existentiel).

Exemple 4.1

- le terme $pere(x)$ désigne le père de x,
- la formule $\forall x \exists y\ parent(y, x)$ indique que tout individu a un parent.

Exemple de formalisation

Si les oiseaux volent, et que les aigles sont des oiseaux, alors les aigles volent.

$$\forall x(Oiseau(x) \Rightarrow Vole(x)) \wedge \forall x(Aigle(x) \Rightarrow Oiseaux(x)) \Rightarrow \forall x(Aigle(x) \Rightarrow Vole(x))$$

Plan

Vocabulaire

- **Deux constantes propositionnelles :** $\bot$ et $\top$
- **Variables :** suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u, v, w, x, y, z
- **Connecteurs :** $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- **Quantificateurs :** $\forall$ le quantificateur **universel** et $\exists$ le quantificateur **existentiel**
- **Ponctuations :** la virgule « , » et les parenthèses ouvrantes « (» et fermantes «) »
- **Symboles ordinaires et spéciaux :**
  - **un symbole ordinaire** est une suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u, v, w, x, y, z
  - **un symbole spécial** est $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$

Exemple

Exemple 4.2

- $x, x1, x2, y$ sont des **variables**
- *homme*, *parent*, *succ*, 12, 24, $f1$ sont des **symboles ordinaires**, les symboles ordinaires représenteront :
  - des **fonctions**
    (constantes numériques ou fonctions à plusieurs arguments)
  - des **relations**
    (variables propositionnelles ou relations à plusieurs arguments)
- $x = y$, $z > 3$ sont des exemples d'application de **symboles spéciaux**

Terme

Définition 4.1

- un symbole ordinaire est un **terme**,
- une variable est un **terme**,
- si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et si s est un symbole (ordinaire ou spécial) alors $s(t_1, \ldots, t_n)$ est un **terme**.

Exemple 4.3

$x, a, f(x1, x2, g(y)), +(x, *(y, z)), +(5, 42)$ sont des termes

par contre $f(\bot, 2, y)$ n'est pas un terme.

Notons que $42(1, y, 3)$ est aussi un terme, mais l'usage veut que les noms des fonctions et relations soient des symboles ordinaires commençant par des lettres.

Formule atomique

Définition 4.2

- $\top$ et $\bot$ sont des **formules atomiques**
- un symbole ordinaire est une **formule atomique**
- si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et si s est un symbole (ordinaire ou spécial) alors $s(t_1, \ldots, t_n)$ est une **formule atomique**.

Exemple 4.4

- $f(1, +(5, 42), g(z))$, a, et $\leq (x, *(y, z))$ **sont** des formules atomiques
- x et $A \vee f(4, 2, 6)$ **ne sont pas** des formules atomiques

Syntaxe *v.s.* Sémantique

L'ensemble des **termes** et l'ensemble des **formules atomiques** **ne sont pas disjoints**.

Par exemple $p(x)$ est un terme et une formule atomique.

Lorsque t est à la fois un terme et une formule atomique, nous distinguerons

- $[\![t]\!]$, le sens de t vu comme un **terme**, de
- $[t]$, le sens de t vu comme une **formule**.

Formule (stricte)

Définition 4.3

- une formule atomique est une **formule**,
- si A est une formule alors $\neg A$ est une **formule**,
- si A et B sont des formules et si $\circ$ est une des opérations $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alors $(A \circ B)$ est une **formule**,
- si A est une formule et si x est une variable **quelconque** alors $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$ sont des **formules**.

Exemple

Exemple 4.5

- $homme(x)$, $parents(fils(y), mere(Alice))$, $= (x, +(f(x), g(y)))$ sont des **formules atomiques**, donc des formules.
- Par contre

  $\boxed{}$

  est **une formule qui n'est pas atomique**.

Formule (stricte) : Exemples

Parmi ces expressions, lesquelles sont des formules strictes :

- x

  $\boxed{}$
- a

  $\boxed{}$
- $(a(x) \Rightarrow b) \wedge a(x) \Rightarrow b$

  $\boxed{}$
- $\exists x((\perp \Rightarrow a(x)) \wedge b(x))$

  $\boxed{}$
- $\exists x \exists y < (-(x, y), +(a, y))$

  $\boxed{}$
- $((a < b) \Rightarrow ((2 * b) > (2 * a)))$

  $\boxed{}$

Taille d'une formule (stricte)

Définition 4.4

La **taille d'une formule** A, notée $|A|$, est définie inductivement par :

- $|\top| = 0$ et $|\bot| = 0$.
- Si A est une formule atomique alors $|A| = 0$.
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|Qx\ A| = 1 + |A|$ si Q est un des quantificateurs $\forall$ ou $\exists$.
- $|(A \circ B)| = |A| + |B| + 1$.

Exemple 4.6

$|\exists x((\bot \Rightarrow a(x)) \wedge b(x))| =$

Abréger l'écriture

Formule à priorité : **les symboles de fonctions** $+, -, *, /$ et **les symboles de relations** $=, \neq, <, >, \leq, \geq$ s'écrivent **de manière usuelle**.

Exemple 4.7

- $\leq (*(3, x), +(y, 5))$ s'**abrège** en
- $+(x, *(y, z))$ s'**abrège** en

La transformation inverse

Donner des priorités

- **les connecteurs** sont moins prioritaires que les relations
- la priorité des quantificateurs est identique à celle de la négation.
- $=, \neq, <, \leq, >, \geq$ sont moins prioritaires que $+, -, *, /$

Tableau récapitulatif des priorités

OPÉRATIONS	
$-+$ unaire	
$*, /$	associatif gauche
$+, -$ binaire	associatif gauche
RELATIONS	
$=, \neq, <, \leq, >, \geq$	
NÉGATION, QUANTIFICATEURS	
$\neg, \forall, \exists$	
CONNECTEURS BINAIRES	
$\wedge$	associatif gauche
$\vee$	associatif gauche
$\Rightarrow$	associatif **droit**
$\Leftrightarrow$	associatif gauche

Table 4.1 – Priorités décroissantes du haut vers le bas.

Formule à priorités

Définition 4.5

- Une formule atomique est **formule à priorité**.
- Si A est une formule à priorité alors $\neg A$ est une **formule à priorité**.
- Si A et B sont des formules à priorité alors $A \circ B$ est une **formule à priorité**.
- Si A est une formule à priorité et si x une variable *quelconque* alors $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$ sont des **formules à priorité**.
- Si A est une formule à priorité alors (A) est une **formule à priorité**.

Exemples

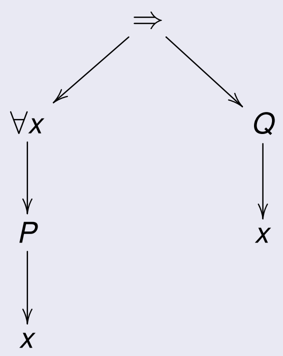
Exemple 4.8

- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$ est une **abréviation** de ?
- $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ est une **abréviation** de ?

Représentation en arbre

Exemple 4.9

$\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$: l'opérande gauche de l'implication est $\forall x P(x)$.



Taille : **2**

Idée

- Le **sens** de la formule $x + 2 = 4$ dépend de x

  ***x* est libre dans cette formule**
- $\forall x (x + 2 = 4)$ est **fausse**
  $\forall x (x + 0 = x)$ est **vraie**

  Il n'y a pas à choisir de valeur pour x afin de déterminer leur valeur respective

  ces deux formules n'ont pas de variables libres

Occurences libres et liées

Définition 4.6

- Dans $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la **portée de la liaison** pour x est A.
- Une occurrence de x dans A est **libre** si elle n'est pas dans la portée d'une liaison pour x, sinon elle est dite **liée**

Si nous représentons une formule par un arbre :

- Une occurrence liée de x est
- Une occurrence de x est libre si

Exemple

Exemple 4.10

$\forall x P(\mathbf{x}, y) \wedge \exists z R(\underline{x}, z)$:

Variables libres, liées

Définition 4.7

- La variable x est une **variable libre** d'une formule si et seulement s'il y a une occurrence libre de x dans la formule.
- Une variable x est une **variable liée** d'une formule si et seulement s'il y a une occurrence liée de x dans la formule.
- Une formule sans variable libre est aussi appelée une **formule fermée**.

Remarque 4.2

Une variable peut-être à la fois libre et liée. Par exemple, dans la formule $\forall x P(x) \vee Q(x)$, x est à la fois libre et liée.

Remarque 4.3

Par définition, une variable qui n'apparaît pas dans une formule (0 occurrence) est une variable **NON** libre de la formule.

Exemple 4.11

Les variables libres de la formule de l'exemple 4.9 sont x et y.

Déclaration de symbole

Définition 4.8

Une **déclaration de symbole** est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Remarque 4.4

Si le contexte donne une déclaration implicite d'un symbole, nous omettons l'exposant.

Exemple 4.12

égal est toujours une relation à 2 arguments, on abrége la déclation $=^{r2}$ en $=$.

Déclaration de symbole : Exemple

Exemple 4.13

- *parent*^{r2} est une **relation** (**r**) avec **2** arguments
- $*^{f2}$ est **fonction** (**f**) avec **2** arguments
- *homme*^{r1} une **relation** unaire

Signature

Définition 4.9

Une **signature** est un ensemble de déclarations de symboles.

Soit $n > 0$ et Σ une signature, le symbole s est :

1. une **constante** de la signature si et seulement si $s^{f0} \in \Sigma$
2. un **symbole de fonction à n arguments** de la signature si et seulement si $s^{fn} \in \Sigma$
3. une **variable propositionnelle** de la signature si et seulement si $s^{r0} \in \Sigma$
4. un **symbole de relation à n arguments** de la signature si et seulement si $s^{rn} \in \Sigma$

Exemples en mathématique

Exemple 4.14

$0^{f0}, 1^{f0}, +^{f2}, -^{f2}, *^{f2}, =^{r2}$ est une signature pour l'arithmétique.

Exemple 4.15

Une signature possible pour la théorie des ensembles est $\in^{r2}, =^{r2}$.

Les autres opérations peuvent être définies à partir de ces symboles.

Surcharge

Définition 4.10

Un symbole est **surchargé** dans une signature, lorsque cette signature comporte deux déclarations distinctes du même symbole.

Exemple 4.16

Le signe moins est souvent surchargé.

- l'opposé d'un nombre
- la soustraction de deux nombres

Dans la suite de ce cours, nous nous interdirons d'utiliser des signatures comportant des symboles surchargés.

Terme sur une signature

Définition 4.11

Soit Σ une signature, un **terme** sur Σ est :

- soit une **variable**,
- soit une **constante** s où $s^{f0} \in \Sigma$,
- soit un terme de la forme $s(t_1, \ldots, t_n)$, où $n \geq 1$, $s^{fn} \in \Sigma$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes sur Σ.

L'ensemble des termes sur la signature Σ est noté T_Σ.

Formule atomique sur une signature

Définition 4.12

Soit Σ une signature, une **formule atomique** sur Σ est :

- soit une des constantes $\top, \bot$,
- soit une **variable propositionnelle** s où $s^{r0} \in \Sigma$,
- soit de la forme $s(t_1, \ldots, t_n)$ où $n \geq 1$, $s^{rn} \in \Sigma$ et où $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes sur Σ.

Formule sur une signature

Définition 4.13

Une **formule** sur une signature Σ est une formule dont les sous-formules atomiques sont des formules atomiques sur Σ (au sens de la définition 4.12).

Nous dénotons l'ensemble des formules sur la signature Σ par F_Σ.

Exemple

Exemple 4.17

$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x, y))$ est une formule sur la signature $\Sigma = \{p^{r1}, q^{r2}, h^{f1}, c^{f0}\}$.

Mais c'est aussi une formule sur la signature $\Sigma' = \{p^{r1}, q^{r2}\}$, puisque les symboles h et c ne figurent pas dans la formule.

Définition 4.14

La **signature associée** à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ, c'est la plus petite signature permettant d'écrire la formule.

Exemple 4.18

La signature associée à la formule $\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y))$ est

Définition 4.15

La **signature associée** à un ensemble de formules est l'union des signatures associées à chaque formule de l'ensemble.

Exemple 4.19

La signature associée à l'ensemble constitué des deux formules $\forall x(p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y)), \forall u\ \forall v\ (u + s(v) = s(u) + v)$ est

Définition 4.16

Une **interprétation** I sur une signature Σ est définie par un domaine D non vide et une application qui à chaque déclaration de symbole $s^{gn} \in \Sigma$ associe sa valeur s_I^{gn} comme suit :

1. s_I^{f0} est un élément de D.
2. s_I^{fn} où $n \geq 1$ est une fonction de D^n dans D, autrement dit une fonction à n arguments.
3. s_I^{r0} vaut 0 ou 1.
4. s_I^{rn} où $n \geq 1$ est un sous-ensemble de D^n, autrement dit une relation à n arguments.

Exemple 4.20

Soit l'interprétation I de domaine $D = \{1,2,3\}$ où la relation binaire *ami* est vraie pour les couples $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$, c'est-à-dire, $ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

- $ami(2,3)$ **est vraie** dans l'interprétation I.
- En revanche, $ami(2,1)$ **est fausse** dans l'interprétation I.

Remarque 4.5

Dans **toute** interprétation I, la valeur du symbole = est l'ensemble $\{(d,d) \mid d \in D\}$, autrement dit dans toute interprétation le sens de l'égalité est **l'identité** sur le domaine de l'interprétation.

Ainsi, sa définition est implicite : nous l'omettons.

Exemple

Exemple 4.21

Considérons une signature suivante.

- $Anne^{f0}$, $Bernard^{f0}$ **et** $Claude^{f0}$: les prénoms Anne, Bernard, et Claude dénotent des constantes,
- a^{r2} : la lettre a dénote une relation à deux arguments (nous lisons $a(x,y)$ comme x aime y) et
- c^{f1} : la lettre c dénote une fonction à un argument (nous lisons $c(x)$ comme le copain ou la copine de x).

Une interprétation possible sur cette signature est l'interprétation I de domaine $D = \{0,1,2\}$ où :

- $Anne_I^{f0} = 0$, $Bernard_I^{f0} = 1$, **et** $Claude_I^{f0} = 2$.
- $a_I^{r2} = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}$.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$.

  Notons que la fonction c_I^{f1} a comme domaine D, ce qui oblige à définir artificiellement $c_I^{f1}(2)$: Claude, dénoté par 2, n'a ni copain, ni copine.

Interprétation d'un ensemble de formules

Définition 4.17

L'interprétation d'un ensemble de formules est une interprétation qui définit seulement le sens de la signature associée à l'ensemble des formules.

État, assignation

Définition 4.18

Un **état** e d'une interprétation est une application de l'ensemble des variables dans le domaine de l'interprétation.

Définition 4.19

Une **assignation** est un couple (I, e) composé d'une interprétation I et d'un état e.

Exemple

Exemple 4.22

Soient le domaine $D = \{1,2,3\}$ et l'interprétation I où la relation binaire *ami* est vraie uniquement pour les couples $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$, c'est-à-dire, $ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Soit e l'état qui associe 2 à x et 1 à y.

L'assignation (I, e) rend la relation $ami(x,y)$ fausse.

Interprétation *vs.* Assignation

Remarque 4.6

La valeur d'une formule ne dépend que de ses variables libres et de ses symboles.

Pour évaluer une formule sans variable libre, l'état des variables est inutile !

Nous avons alors deux possibilités :

- Pour une formule **sans variables libres**, il suffit de donner une **interprétation I** des symboles de la formule.

  Dans ce cas, les assignations (I, e) et (I, e') donnerons la même valeur à la formule pour tous états e et e'.

  Ainsi pour tout état e, **nous identifierons** (I, e) **et** I. Selon le contexte, I sera considéré comme soit une interprétation soit une assignation dont l'état est quelconque.

- Pour une formule **avec des variables libres**, nous avons donc besoin d'une **assignation**.

Évaluation des termes

Définition 4.20

Nous donnons la définition inductive de l'évaluation d'un terme t :

1. si t est une variable, alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = e(t)$,
2. si t est une constante alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = t_I^{f0}$,
3. si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = s_I^{fn}([\![t_1]\!]_{(I,e)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,e)})$.

Exemple

Exemple 4.23

Soit la signature a^{f0}, f^{f2}, g^{f2}.

Soit I l'interprétation de domaine $\mathbb{N}$ où :

- $a_I = 1$;
- f_I^{f2} est le produit ;
- g_I^{f2} est la somme.

Soit e l'état tel que $x = 2, y = 3$.

Calculons $[\![f(x, g(y, a))]\!]_{(I,e)}$.

Sens des formules atomiques

Définition 4.21

Le sens des formules atomiques est donné par les règles inductives suivantes :

1. $[\top]_{(I,e)} = 1, [\bot]_{(I,e)} = 0$.
2. Soit s une variable propositionnelle, $[s]_{(I,e)} = s_I^{r0}$.
3. Soit $A = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes. **Si** $([\![t_1]\!]_{(I,e)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,e)}) \in s_I^{rn}$ **alors** $[A]_{(I,e)} = 1$ **sinon** $[A]_{(I,e)} = 0$.

Exemple

Exemple 4.24

Considérons une signature suivante.

- $Anne^{f0}$, $Bernard^{f0}$ **et** $Claude^{f0}$: les prénoms Anne, Bernard, et Claude dénotent des constantes,
- a^{r2} : la lettre a dénote une relation à deux arguments
  (nous lisons $a(x, y)$ comme x aime y) et
- c^{f1} : la lettre c dénote une fonction à un argument
  (nous lisons $c(x)$ comme le copain ou la copine de x).

Une interprétation possible sur cette signature est l'interprétation I de domaine $D = \{0, 1, 2\}$ où :

- $Anne_I^{f0} = 0$, $Bernard_I^{f0} = 1$, **et** $Claude_I^{f0} = 2$.
- $a_I^{r2} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$.
  Notons que la fonction c_I^{f1} a comme domaine D, ce qui oblige à définir artificiellement $c_I^{f1}(2)$: Claude, dénoté par 2, n'a ni copain, ni copine.

Exemple 4.23

Nous obtenons :

- $[a(Anne, Bernard)]_I =$
- $[a(Anne, Claude)]_I =$

Exemple 4.23

Soit e l'état $x = 0, y = 2$. Nous avons :

- $[a(x, c(x))]_{(I,e)} =$
- $[a(y, c(y))]_{(I,e)} =$

Attention à distinguer (suivant le contexte), les éléments du domaine $0, 1$ et les valeurs de vérité $0, 1$.

Exemple 4.23

Nous avons :

- $[(Anne = Bernard)]_I =$
- $[(c(Anne) = Anne)]_I =$
- $[(c(c(Anne)) = Anne)]_I =$

Aujourd'hui

- Langage
- Notions « libre » et « lié »
- Sens des formules
- Interprétation

La prochaine fois

- Sens des formules (suite et fin)
- Trouver des modèles finis
- Equivalences remarquables

Merci de votre attention.