Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique

Logique du premier ordre

Deuxième partie : Interprétation d'une formule

Stéphane Devismes

Université de Picardie Jules Verne

13 février 2025

Rappels

- **Deux constantes propositionnelles :** $\perp$ et $\top$
- **Variables :** suite de lettres et de chiffres commençant par une des minuscules u, v, w, x, y, z
- **Connecteurs :** $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- **Quantificateurs :** $\forall$ le quantificateur **universel** et $\exists$ le quantificateur **existentiel**
- **Ponctuations :** la virgule « , » et les parenthèses ouvrantes « (» et fermantes «) »
- **Symboles ordinaires et spéciaux pour représenter des relations et des fonctions :**
  - **un symbole ordinaire** est une suite de lettres et de chiffres ne commençant pas par une des minuscules u, v, w, x, y, z
  - **un symbole spécial** est $+, -, *, /, =, \neq, <, \leq, >, \geq, \ldots$

Rappels (suite)

- D est un **domaine** non vide.
- Une **signature** définit les symboles en tant que : constantes, fonctions, variables propositionnelles et relations.
- Une **interprétation** I sur une signature donne le sens de chaque symbole de la signature.
  1. constantes $\in D$
  2. fonctions : $D^n \rightarrow D$
  3. variables propositionnelles $\in \{0, 1\}$
  4. relations $\subseteq D^n$.

  Dans la suite, une **interprétation** I **d'une formule** A : interprétation sur une signature Σ telle que A est formule de Σ.
- e est un **état** des variables libres de la formule, qui associe à chacune un élément du domaine D.
- **Assignation** : couple interprétation/état.

Exemple 4.24

Considérons la signature suivante.

- $Anne^{f0}$**,** $Bernard^{f0}$ **et** $Claude^{f0}$
- a^{r2} : $a(x, y)$ signifie « x aime y »
- c^{f1} : $c(x)$ désigne le copain de x

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0, 1, 2\}$ où :

- $Anne_I^{f0} = 0$**,** $Bernard_I^{f0} = 1$**, et** $Claude_I^{f0} = 2$.
- $a_I^{r2} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}$.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$.

  $c_I^{f1}(2)$ est défini artificiellement : Claude n'a pas de copain.

Sens des formules (suite)

Une **assignation** (I, e) donne une valeur :

- aux **termes** et
- aux **formules atomiques**.

Pour pouvoir **évaluer une formule**, il nous reste à fixer le sens :

- des **connecteurs propositionnels** et
- des deux **quantificateurs** ($\forall$ et $\exists$)

Sens des connecteurs propositionnels

Les connecteurs propositionnels ont le même sens qu'en logique propositionnelle.

Exemple : formule ferméee sans quantificateur

Exemple 5.1

Soit l'interprétation I de domaine $D = \{1,2,3\}$ où la relation binaire *ami* est vraie pour les couples $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$, c'est-à-dire,

$$ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}.$$

La formule $ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)$ est vraie dans l'interprétation I :

$$\begin{aligned}[ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)]_I &= [ami(1,2)]_I \wedge [ami(2,3)]_I \Rightarrow [ami(1,3)]_I \\ &= 1 \wedge 1 \Rightarrow 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Sens du quantificateur universel

Soient x une variable et B une formule.

$[\forall xB]_{(I,e)} = 1$ si et seulement si $[B]_{(I,f)} = 1$ **pour tout** état f identique à e, sauf pour x.

Soit $d \in D$. Notons $e[x = d]$ l'état identique à l'état e, sauf pour la variable x, auquel l'état $e[x = d]$ associe la valeur d.

La définition ci-dessus peut être formaliser comme suit :

$$[\forall xB]_{(I,e)} = min_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \prod_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])}$$

où le produit est le produit booléen.

Sens du quantificateur existentiel

Soient x une variable et B une formule.

$[\exists x B]_{(I,e)} = 1$ si et seulement s'**il y a** un état f identique à e, sauf pour x, tel que $[B]_{(I,f)} = 1$.

La définition ci-dessus peut être formaliser comme suit :

$$[\exists x B]_{(I,e)} = max_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \sum_{d \in D} [B]_{(I,e[x=d])}$$

où la somme est la somme booléenne.

Exemple avec quantificateur

Exemple 5.2

Utilisons l'interprétation I donnée dans l'exemple 4.24. (Rappel $D = \{0, 1, 2\}$)

- $[\exists x\ a(x, x)]_I =$
- $[\forall x \exists y\ a(x, y)]_I =$

Exemple avec quantificateur (suite)

Exemple 5.3

- $[\exists y \forall x\ a(x, y)]_I =$

Remarque 5.1

Les formules $\forall x \exists y\ a(x, y)$ et $\exists y \forall x\ a(x, y)$ n'ont pas la même valeur. Donc en intervertissant un quantificateur existentiel et un quantificateur universel, nous ne préservons pas le sens des formules.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en **logique propositionnelle**.

Une assignation

- **En logique propositionnelle** : $V \rightarrow \{0, 1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

La valeur d'une formule ne dépend que de ses variables libres et de ses symboles.

L'état des variables est inutile pour évaluer une formule sans variables libres.

On utilise une interprétation au lieu d'une assignation.

Instanciation

Définition 5.1

Soit x une variable, t un terme et A une formule.

1. $A < x := t >$ est la formule obtenue en **remplaçant** dans la formule A toute occurrence libre de x par le terme t.
2. Le terme **t est libre pour x dans A** si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

Instantiation : Exemple

Exemple 5.4

- Le terme **z est libre pour x** dans la formule $\exists y p(x, y)$.
- Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y (par exemple, $f(a, y)$), **n'est pas libre pour x** dans cette formule.
- Par définition, le terme **x est libre pour lui-même** dans toute formule.
- Soit A la formule $(\forall x P(x) \vee Q(\mathbf{x}))$, la formule $A < x := b >$ vaut $(\forall x P(x) \vee Q(b))$ car seule l'occurrence en gras de x est libre.

Propriétés

Théorème 5.1

Soient A une formule et **t un terme libre pour la variable x dans A**. Soient I une interprétation de A et e un état de l'interprétation. Nous avons $[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$, où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Corollaire 5.1

Soient A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall x A \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists x A$ sont valides.

La condition sur t est nécessaire :

La condition t terme **libre** est nécessaire dans **le théorème 5.1**.

Exemple 5.5

Soient I l'interprétation de domaine $\{0, 1\}$ avec $p_I = \{(0, 1)\}$ et e, un état où $y = 0$. Soient A la formule $\exists y\ p(x, y)$ et t le terme y. **Ce terme n'est pas libre pour x dans A.**

- $A < x := t > = \exists y\ p(y, y)$
  et $[A < x := t >]_{(I,e)} =$
  $[\exists y\ p(y, y)]_{(I,e)} = \max\{[p(0, 0)]_{(I,e)}, [p(1, 1)]_{(I,e)}\} = max\{0, 0\} = 0$.

Exemple 5.5 : La condition sur t est nécessaire.

- Soit $d = [\![t]\!]_{(I,e)} = [\![y]\!]_{(I,e)} = 0$. Dans l'assignation $(I, e[x = d])$, nous avons $x = 0$. Donc $[A]_{(I,e[x=d])} =$
$[\exists y\ p(x,y)]_{(I,e[x=d])} = \max\{[p(0,0)]_{(I,e)}, [p(0,1)]_{(I,e)}\} = max\{0,1\} = 1$.

Ainsi,

$$[A < x := t >]_{(I,e)} \neq [A]_{(I,e[x=d])}, \textbf{ pour } d = [\![t]\!]_{(I,e)}.$$

Modèle fini

Définition 5.2

Un **modèle fini d'une formule fermée** est une interprétation de la formule de domaine fini, qui rend vraie la formule.

Remarque 5.2

- Le nom des éléments du domaine est sans importance.
- Ainsi pour un modèle avec n éléments, nous utiliserons le domaine des entiers naturels inférieurs à n :

$$0, \ldots, n-1$$

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Exemple 5.6

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$, plus éventuellement l'égalité de sens fixé.

Sur un domaine à 5 éléments, Σ a $5 \times 5^5 \times 2^{25}$ **interprétations !**

Cette méthode est **inutilisable** en pratique.

Logiciel pour construire un modèle fini

MACE

- **traduction** des formules du premier ordre en formules propositionnelles
- **algorithmes performants pour trouver la satisfaisabilité** d'une formule propositionnelle (par exemple des variantes de l'algorithme de `DPLL`)

`http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/mace4.pdf`

Nous allons nous en inspirer . . .

Méthode pour la recherche d'un modèle fini

Cas simple : Recherche de modèles à n éléments **par réduction au cas propositionnel** pour **une formule n'ayant aucun symbole de fonction et aucune constante**, sauf des entiers naturels inférieurs à n.

Construction du modèle à n éléments

1. suppression des quantificateurs par expansion sur un domaine à n éléments,
2. remplacement des égalités par leur valeur
3. recherche d'une assignation propositionnelle qui soit modèle.

Expansion d'une formule

Dans la suite, de façon implicite, toutes les interprétations considérées donnent à toute constante entière la valeur de l'entier représenté.

Définition 5.3

Soient A une formule et n un entier naturel. La ***n*-expansion de *A*** est la formule qui consiste à remplacer :

- toute sous-formule de A de la forme $\forall xB$ par la conjonction $(\prod_{i<n} B < x := i >)$
- toute sous-formule de A de la forme $\exists xB$ par la disjonction $(\sum_{i<n} B < x := i >)$

Exemple 5.7

La 2-expansion de la formule $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$ est la formule

Propriété de la n-expansion

Théorème 5.2

Soient n un entier naturel et A une formule fermée ne comportant que des entiers naturels de valeur inférieure à n.

Soit B la n-expansion de A.

Toute interprétation de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$ de A (et donc de B) attribue la même valeur à A et à B.

La condition sur A est nécessaire car si A comporte un entier au moins égal à n, cet entier ne sera pas dans le domaine de l'interprétation.

La preuve de ce théorème (par récurrence sur la taille des formules) est admise.

De l'assignation à l'interprétation

Soient n un entier naturel et A une formule fermée, sans quantificateur, sans égalité, sans symbole de fonction, sans constante sauf des entiers naturels inférieurs à n.

Soit P l'ensemble des formules atomiques de A, sauf $\top$ et $\bot$ dont le sens est fixé.

Théorème 5.3

Soit v une assignation propositionnelle de P dans $\{0, 1\}$ alors il existe une interprétation I de A dont le domaine est $\{0, \ldots, n-1\}$ telle que $[A]_I = [A]_v$.

Exemple

Exemple 5.8

Considérons la formule $(p(0)+p(1)) \Rightarrow (p(0).p(1))$.

$P = \{p(0), p(1)\}$

Soit v l'assignation définie par $p(0) = 1, p(1) = 0$.

v **donne la valeur** 0 à la formule $(p(0)+p(1)) \Rightarrow (p(0).p(1))$.

Donc l'interprétation I de domaine $\{0,1\}$ définie par $p_I = \{0\}$ **donne aussi la valeur** 0 à cette même formule.

Cet exemple montre que v et I sont deux façons analogues de présenter une interprétation, la deuxième étant souvent plus concise.

De l'interprétation à l'assignation

Soient n un entier naturel et A une formule fermée, sans quantificateur, sans égalité, sans symbole de fonction, sans constante sauf des entiers naturels inférieurs à n.

Soit P l'ensemble des formules atomiques de A, sauf $\top$ et $\bot$ dont le sens est fixé.

Théorème 5.4

Soit I une interprétation de A alors il existe une assignation v de P telle que

$$[A]_I = [A]_v.$$

Recherche d'un modèle fini d'une formule fermée **sans** fonctions ni constantes sauf des entiers naturels $< n$

Procédure sous les mêmes hypothèses :

1. Remplacer A par sa **n-expansion B**
2. Dans B,
   - **remplacer les égalités par leur valeur** c'est-à-dire, $i = j$ est remplacée par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.
   - Simplifier par les identités $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$.

   Soit C la formule ainsi obtenue.
3. Chercher **une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C, qui soit modèle de C** :
   - si une telle assignation n'existe pas, A n'a pas de modèle
   - sinon l'interprétation I déduite de v est modèle de A.

Correction de la méthode

1. **Supposons qu'il n'a pas d'assignation propositionnelle modèle de C, mais que A ait un modèle I à n éléments**.
   - D'après le théorème 5.2, I est modèle de B, donc de C.
   - D'après le théorème 5.4, il y a une assignation propositionnelle modèle de C.

   De cette contradiction, nous déduisons que A n'a pas de modèle à n éléments.
2. **Supposons l'existence d'une assignation propositionnelle v des formules atomiques de C qui soit modèle de C**.
   Donc, d'après le théorème 5.3, il existe une interprétation I à n éléments qui est modèle de C.
   Donc, elle est modèle de B.
   D'après le théorème 5.2, elle est modèle de A.

Exemple

Exemple 5.9

$A = \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$
A n'a pas modèle à un élément, car nous avons P et sa négation.

2-expansion de A

$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 0 = 0).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0 = 1).(P(1).P(0) \Rightarrow 1 = 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1 = 1).$

En remplaçant les égalités par leur valeurs
$(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)}).(P(0).P(0) \Rightarrow 1).$
$(P(0).P(1) \Rightarrow 0).(P(1).P(0) \Rightarrow 0).(P(1).P(1) \Rightarrow 1).$
Ce qui ce simplifie en : $(P(0) + P(1)).(\overline{P(0)} + \overline{P(1)})$

L'assignation $P(0) = 1, P(1) = 0$ est un des modèles propositionnels de la formule ci-dessus, donc l'interprétation I de domaine $\{0, 1\}$ où $P_I = \{0\}$ est modèle de A.

Recherche d'un modèle fini d'une formule fermée avec des fonctions, des constantes dont des entiers naturels $< n$

Soit A une formule fermée pouvant comporter des entiers naturel inférieur à n.

Procédure

- Remplacer A par son expansion.
- Supprimer les égalités.
- Enumérer les choix des valeurs des symboles autres que $0, \ldots, n-1$, en propageant le plus possible chacun des choix effectués (Branchement/retour arrière).

Exemple

Exemple 5.10

Chercher un contre-modèle à 2 éléments de $A = \exists y P(y) \Rightarrow P(a)$

Exemple

Exemple 5.11

Cherchons un modèle de $P(a), \forall x (P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$

1. 2-expansion : $F = \{P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))).(P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))\}$
2. Trouver les valeurs de $P(0)$, $P(1)$, a, b, $f(0)$ et $f(1)$ modèle de F : $P(a) = 1$, $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, $(P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1$, $P(f(b)) = 0$
3. Choisissons $a = 0$
   - De $P(a) = 1$ et $a = 0$, on déduit : $P(0) = 1$
   - De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$, on déduit : $P(f(0)) = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, on déduit $f(0) \neq f(b)$ donc que $b \neq 0$, donc : $b = 1$
   - De $P(f(b)) = 0$, $P(0) = 1$ et $b = 1$, on déduit $f(b) = f(1) \neq 0$ donc : $f(1) = 1$ et $P(1) = 0$
   - De $P(f(0)) = 1$ et $P(1) = 0$, on déduit : $f(0) = 0$

Modèle de domaine $\{0, 1\}$: $a = 0, b = 1, P = \{0\}, f(0) = 0, f(1) = 1$

Substitution

L'application d'une substitution à une formule **propositionnelle** valide donne une formule valide, s'étend à la logique du premier ordre.

Exemple 5.12

Soit $\sigma(p) = \forall x\ q(x)$.
$p \vee \neg p$ est valide, il en est de même de la formule

$$\sigma(p \vee \neg p) = \forall x\ q(x) \vee \neg\forall x\ q(x)$$

Remplacement

Le principe de **remplacement** s'étend avec le même énoncé de la logique propositionnelle à la logique du premier ordre car il est déduit des propriétés élémentaires suivantes :

Pour toutes formules A et B et toute variable x :

- $(A \Leftrightarrow B) \models (\forall xA \Leftrightarrow \forall xB)$
- $(A \Leftrightarrow B) \models (\exists xA \Leftrightarrow \exists xB)$

Relation entre $\forall$ et $\exists$

Lemme 5.1

Soient A une formule et x une variable.

1. $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$
2. $\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$
3. $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$
4. $\exists xA \equiv \neg\forall x\neg A$

Prouvons les deux premières identités, les deux autres seront demandées en TD.

Preuve de $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$

Soit I une interprétation de domaine D et e un état

Evaluons $[\neg\forall xA]_{(I,e)}$

$$
\begin{array}{ll}
= 1 - [\forall xA]_{(I,e)} & \\
= 1 - \prod_{d\in D}[A]_{(I,e[x=d])} & \text{d'après le sens de } \forall \\
= \sum_{d\in D}\left(1 - [A]_{(I,e[x=d])}\right) & \text{par les lois de de Morgan généralisées} \\
= \sum_{d\in D}[\neg A]_{(I,e[x=d])} & \text{par définition du sens de } \neg \\
= [\exists x\neg A]_{(I,e)} & \text{par définition du sens de } \exists
\end{array}
$$

Preuve de $\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
3. $\forall x(A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$
4. $\exists x(A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$
5. Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$, soit $\circ$ une des opérations $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Supposons que **$x$ n'est pas une variable libre de A**.
   1. $QxA \equiv A$,
   2. $Qx(A \circ B) \equiv (A \circ QxB)$

Exemple

Exemple 5.13

Nous éliminons de ces deux formules les quantificateurs inutiles :

- $\forall x \exists x P(x) \equiv$
- $\forall x(\exists x P(x) \vee Q(x)) \equiv$

Changement de variables liées (1/4)

Théorème 5.5

Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$. Supposons que y soit une variable qui ne figure pas dans QxA alors : $QxA \equiv QyA < x := y >$.

Exemple 5.14

- $\forall x\ p(x,z) \equiv \forall y\ p(y,z)$.
- $\forall x\ p(x,z) \not\equiv \forall z\ p(z,z)$.

Changement de variables liées (2/4)

Définition 5.4

Deux formules sont **égales à un changement près de variables liées** si nous pouvons obtenir l'une à partir de l'autre par des remplacements de sous-formules de la forme QxA par

$$QyA < x := y >$$

où Q est un quantificateur et y est une variable qui ne figure pas dans QxA.

Les deux formules sont **α-équivalentes** ou copie l'une de l'autre ou encore, notée $A =_\alpha B$

Changement de variables liées (3/4)

Théorème 5.6

Si deux formules sont égales à un changement près de variables liées alors elles sont équivalentes.

Changement de variables liées (4/4)

Exemple 5.15

Montrons que les formules $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont égales par changement des variables liées et donc équivalentes.

Savoir si deux formules sont α-équivalentes

Technique

- Tracer des traits entre chaque quantificateur et les variables qu'il lie.
- Effacer les noms des variables liées.

Si après cette transformation, les deux formules deviennent identiques, c'est qu'elles sont égales à un changement près des variables liées.

Exemple 5.16

Soit $\forall x \exists y P(y, x)$ et $\forall y \exists x P(x, y)$ deux formules.

$$\forall|\exists|P(|,|)$$

Exercice

Calculer la transformation pour

- $A = \forall x \forall y\ R(x, y, y)$
- $B = \forall x \forall y\ R(x, x, y)$

A et B sont-elles α-équivalentes ? **non**

Conclusion

C'est la fin !

mais ce n'était qu'un introduction !

Merci de votre attention.