

Éléments de Logique Formelle et du Raisonnement Mathématique : Partiel

Stéphane Devismes

4 mars 2025

2 pages

Total : 90 points

Durée : 1h30

Documents autorisés : une feuille recto verso de notes manuscrites format A4.

Le barème est *indicatif*, les points correspondent au nombre de minutes nécessaires pour réaliser les exercices. L'épreuve sera notée sur 90 points.

Le résultat d'une question peut être admis pour s'en servir dans la suite de l'énoncé.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix à condition de les numéroter clairement.

Exercice 1 (Arbre, table de vérité, formes normales et conséquences (25 points))

Soit A la formule $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg a \vee c \wedge \neg b$

1. Donnez la représentation arbre de la formule A . (3 points)
2. Donnez la table de vérité de la formule A . (10 points)
3. Déduisez de la table de vérité une forme normale disjonctive de la formule A . (3 points)
4. Déduisez de la table de vérité une forme normale conjonctive de la formule A . (3 points)
5. La formule A est-elle une conséquence de $a \Rightarrow b$? Justifiez. (3 points)
6. $a \Rightarrow b$ est-elle une conséquence de la formule A ? Justifiez. (3 points)

□

Exercice 2 (Formule stricte, modèles et formes normales (25 points))

Soit A la formule $a \Rightarrow b \wedge c \vee \neg a \Leftrightarrow b$

1. Donnez la formule stricte dont la formule A est l'abréviation. (1 point)
2. Déterminez une forme normale disjonctive de la formule A et la simplifiez le plus possible. (11 points)
3. Déterminez une forme normale conjonctive de la formule A et la simplifiez le plus possible. (11 points)
4. Si c'est possible, donnez un modèle de la formule A et justifiez la réponse sans utiliser de table de vérité. (1 point)
5. Si c'est possible, donnez un contre-modèle de la formule A et justifiez la réponse sans utiliser de table de vérité. (1 point)

□

Exercice 3 (Formalisation, 20 points (exercice de TD)) *Pinocchio, Quasimodo et Roméo s'apprêtent à chanter en canon. Ils décident entre eux que :*

1. Si Pinocchio ne chante pas alors Quasimodo chantera.
2. Si Quasimodo chante alors Pinocchio et Roméo chanteront.
3. Si Roméo chante alors Quasimodo ou Pinocchio, l'un des deux au moins, ne chantera pas.

Peut-on en conclure que Pinocchio chantera ? Pour répondre :

1. Formalisez le raisonnement et (12 points)
2. Montrez que la conjonction des hypothèses et la négation de la conclusion est contradictoire. (8 points)

□

Exercice 4 (Connecteur complet, 20 points) On appelle connecteur de Scheffer l'opérateur binaire \uparrow tel que $x \uparrow y$ est faux si et seulement si x et y sont tous les deux vrais.

1. Donnez la table de vérité de \uparrow . (3 points)
2. Donnez (sans justification) deux formules distinctes équivalentes à $x \uparrow y$ en utilisant les connecteurs habituels de la logique propositionnelle. (2 points)
3. Démontrez que le connecteur \uparrow est complet, en montrant (et en justifiant rapidement) comment il permet d'exprimer les connecteurs \neg , \wedge et \vee . (15 points)

□