TD 5 d'Algorithmique des graphes

Alain Cournier   Stéphane Devismes   Vassilis Giakoumakis

23 mars 2022

Résumé

L'objectif de ce TD est de se familiariser avec la notion d'algorithme calculant les chemins de poids minimaux. Dans tous les exercices sauf mention contraire nous considérerons que l'ensemble des sommets est un intervalle des entiers naturels de la forme 0..n.

1 Première application

Soit G=(X,U) le graphe suivant :
X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}
U = {(ab,1), (ac,5), (ag, 9), (bd,13), (bf, 5), (bg,6), (ci,8), (cd,9), (ce, 3), (de, 8), (dg, 6), (ef,6), (eh, 8), (fi, 9), (gh, 3), (hi,2), (ij,3), (ja, 8)}
Appliquez l'algorithme de Dijstra a partir du sommet a puis du sommet d. Même question avec l'algorithme de Bellman Ford

2 Recherche d'un contre exemple

Donnez un exemple simple de graphe orienté comportants des arcs de poids négatifs pour lequel l'algorithme de Dijkstra ne donne pas un résultat correct. En quoi la démonstration de l'algorithme données en cours n'est plus valide.

Qu'en pensez-vous ?

3 Algorithme du chemin de poids maximal

Vous connaissez des algorithmes pour calculer les chemins de poids minimaux issus d'un sommet.

On désire chercher un algorithme calculant les chemins de poids maximaux issus d'un sommet.

1. A quelle(s) condition(s), le chemin de poids maximal a-t-il une longueur finie ?
2. Peut-on adapter les algorithmes classiques du chemin de poids minimal ?
   - Si oui, à quelle(s) condition(s) ? (Il faut l'algorithme et une preuve)
   - Si non, expliquez pourquoi, et donner un algorithme du plus long chemin si un tel algorithme existe (ou une preuve de non-existence d'un tel algo).

4 Questions de change

L'arbitrage est l'utilisation du décalage entre les taux de change d'une monnaie pour transformer une unité de monnaie en plus d'une unité de cette même monnaie. Par exemple, supposons que 1 Dollar U.S = 0,7 Livre Sterling, qu'1 Livre Sterling = 9,5 Francs Français, et que 1 Francs Français = 0,16 Dollar U.S. Alors, avec 1 Dollar U.S. on peut acheter : $0,7 \times 9,5 \times 0,16 = 1,064$ Dollar U.S.

Supposons que l'on dispose dans un tableau R, indicé par n monaie, $m_1, \ldots, m_n$ du taux de change entre tous les couples de monnaie. Ainsi, dans le tableau, $R[m_i, m_j]$, représente le nombre d'unité de la monaie m_j obtenus à partir d'une unité de la monaie m_i.

1. Donnez un algorithme permettant de convertir 1 m_i en un maximum de m_j ;
2. Donner un algorithme efficace permettant de déterminer s'il existe une séquence ce monnaies : $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{k-1}, s_k$ telle que :

   $$R[s_1, s_2] \times R[s_2, s_3] \times \ldots R[s_{k-1}, s_k] \times R[s_k, s_1] > 1.$$

   Complexité de votre algorithme.
3. Donnez un algorithme, permettant d'exiber une telle séquence. Complexité de l'algorithme.