ALGORITHMES DE FLOT MAXIMAL

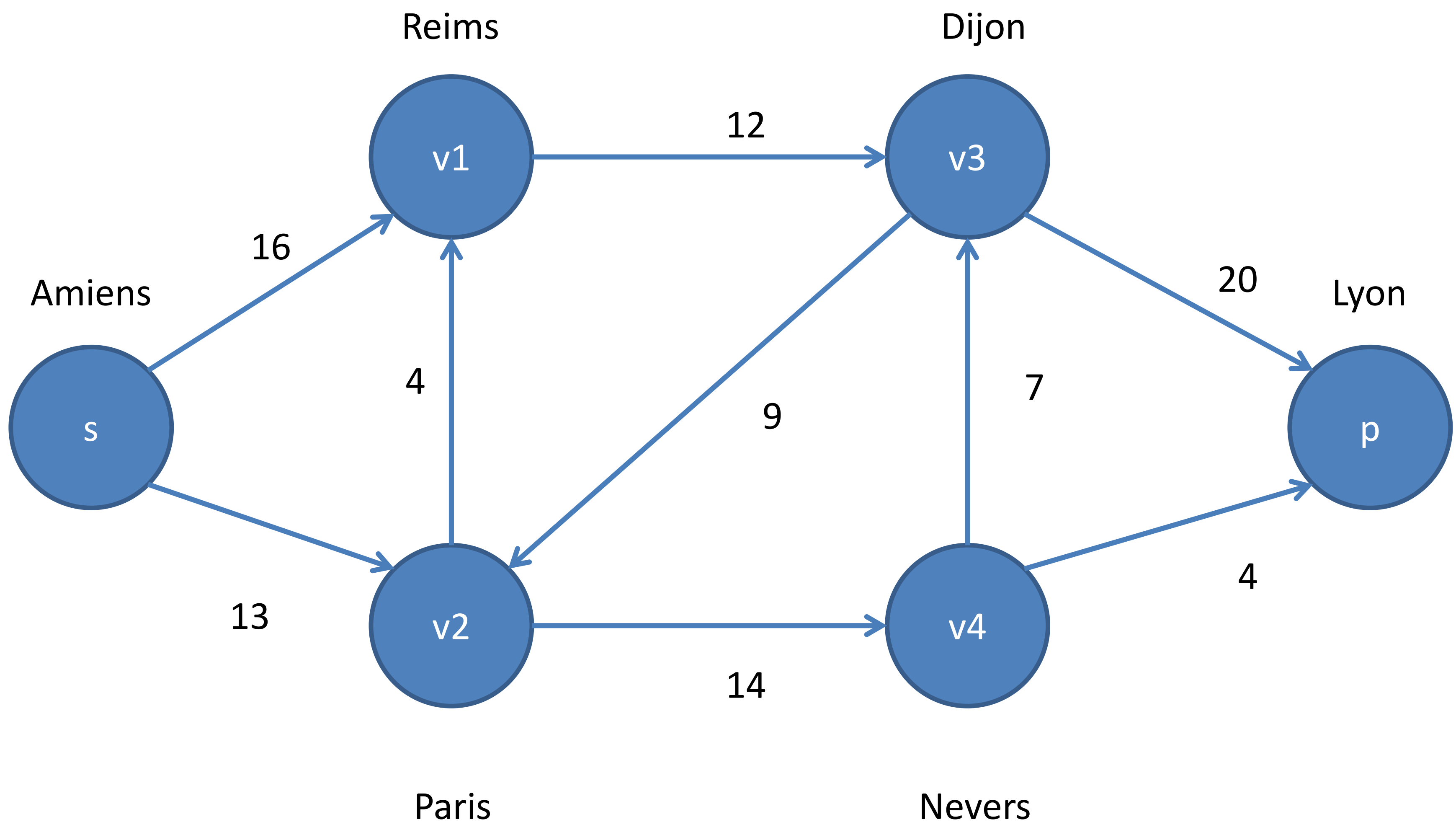
Présentation : Graphes ou réseaux de flots (1)

- Soit G=(X,U,C) un graphe orienté étiqueté sur ses arcs.
- Pour chacun des arcs xy de notre graphe G, l’étiquette c(x,y) représente la capacité maximale de transport (le débit) du lien entre x et y. Pour tout arc on suppose que $c(x,y) \geq 0$.
- On considère que G est antisymétrique.

Présentation : Graphes ou réseaux de flots (2)

- Deux sommets particuliers s (la source) et p (le puit) servant de points de départ et d’arrivée de notre flot.
- Le problème du flot maximal consiste donc à acheminer un maximum de produit depuis la source s vers le puit p en respectant la capacité maximale de chacun des arcs du graphe de flot.

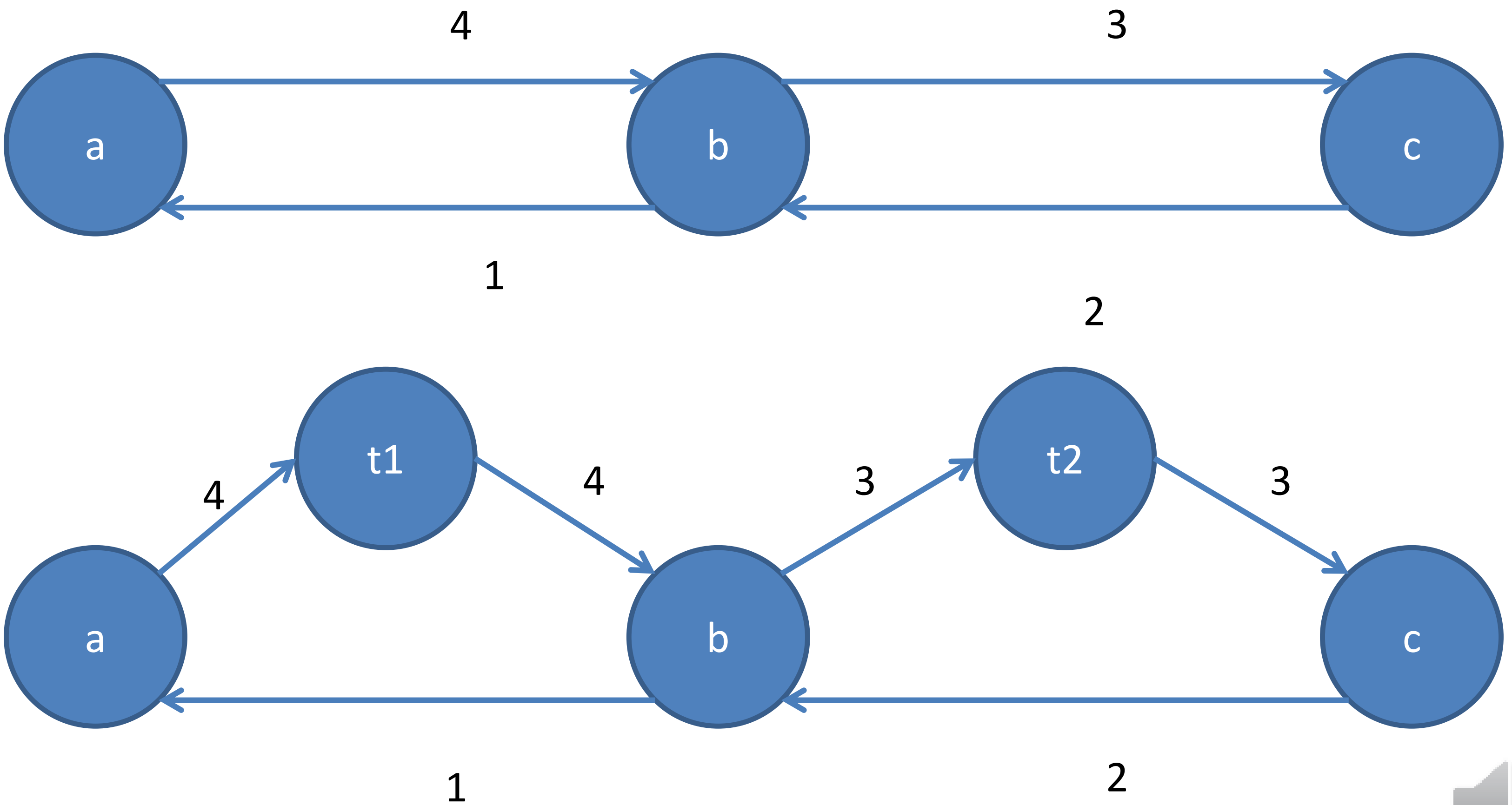
Exemple


Reims
Dijon
12
v1
v3
16
20
Amiens
Lyon
4
7
s
9
p
4
13
v2
v4
14
Paris
Nevers

Et si le graphe n’est pas antisymétrique ?

- Tant que le graphe n’est pas antisymétrique
- Dans ce cas il existe deux sommets distincts a et b tels que les deux arcs ab et ba existent.
- On crée un nouveau sommet nommé t dans notre graphe.
- On retire l’arc ab du graphe et on ajoute les deux arcs at et tb.
- c(tb) = c(at) = c(ab).

Et si le graphe n'est pas antisymétrique ?



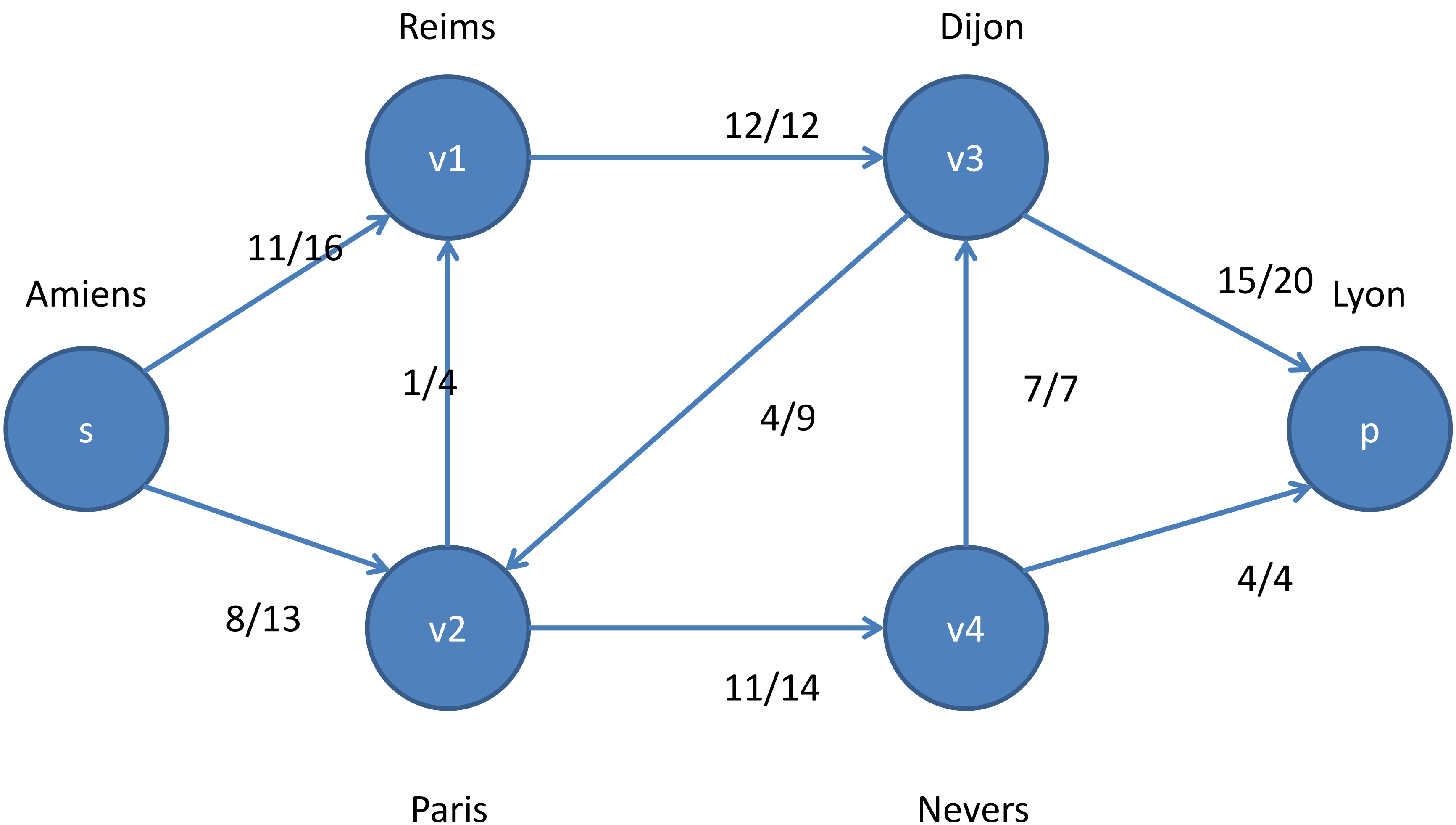
Que cherche-t-on ?

- On cherche un étiquetage f des arcs du graphe tel que :
  - Pour tout arc xy de G : f(xy) ≤ c(x,y)
  - Pour tout sommet u, (sauf s et p) :

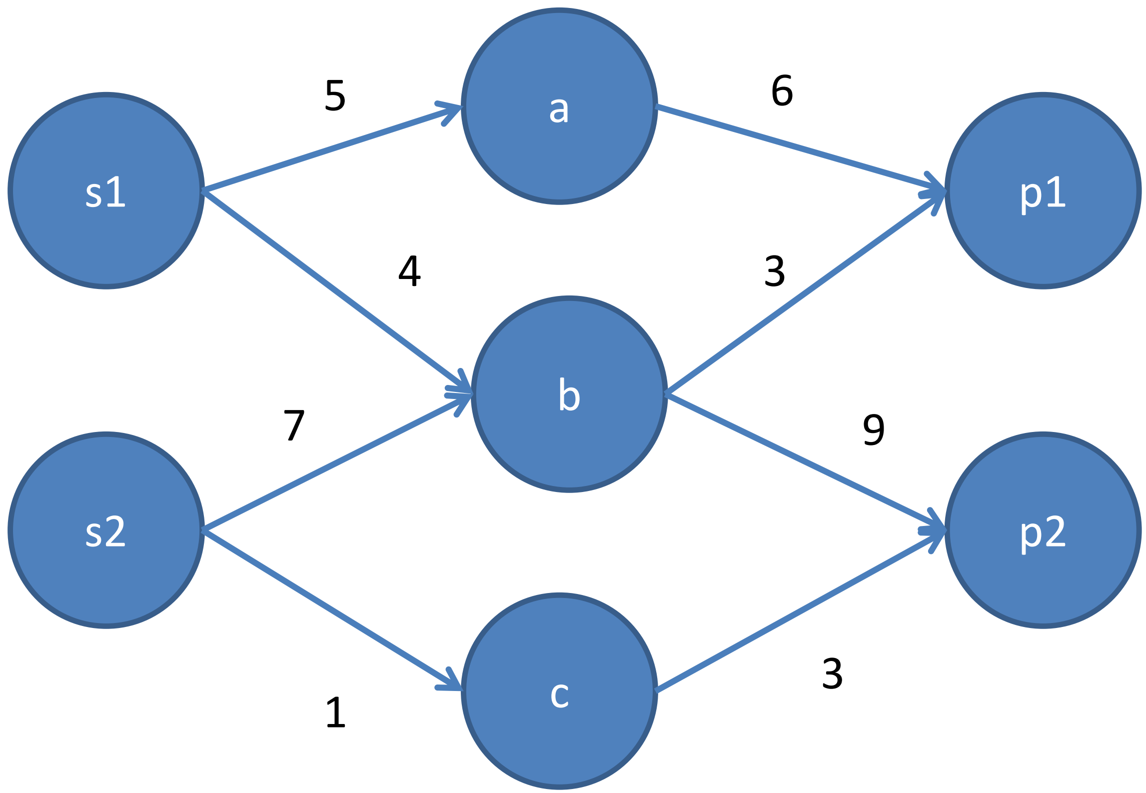
$$\sum_{uy \in U} f(uy) = \sum_{yu \in U} f(yu)$$

i.e. le flux entrant dans un sommet est égal au flux sortant du sommet.

Exemple


Reims
Dijon
v1
12/12
v3
11/16
15/20
Lyon
Amiens
1/4
7/7
4/9
s
p
4/4
8/13
v2
v4
11/14
Paris
Nevers

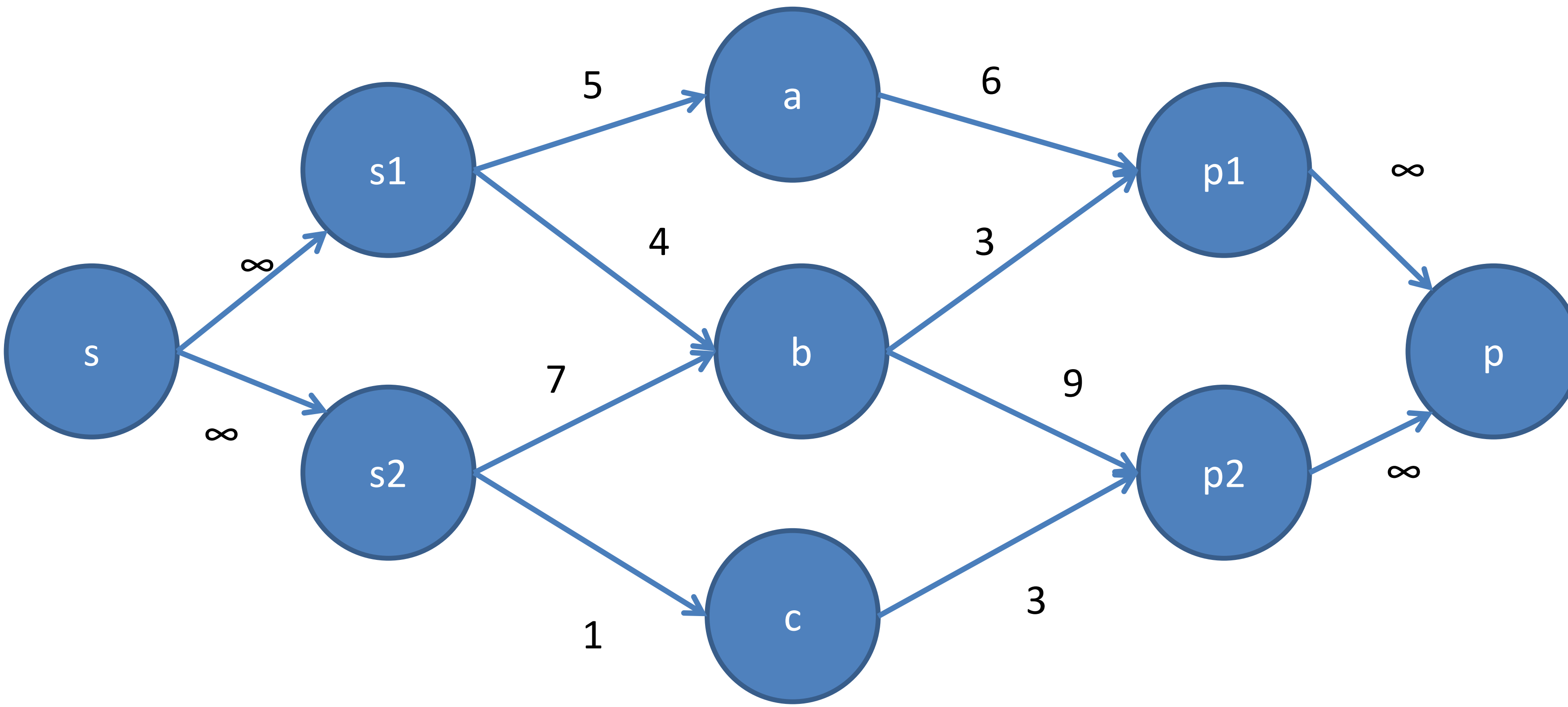
Que faire en cas de sources et/ou de puits multiples



Que faire en cas de sources et/ou de puits multiples

- On ajoute un nouveau sommet source s que l’on relie par des arcs d’origine s et de capacité infinie à toutes les sources multiples.
- On ajoute un nouveau sommet puit p que l’on relie par des arcs d’extrémité p et de capacité infinie à tous les puits multiples.

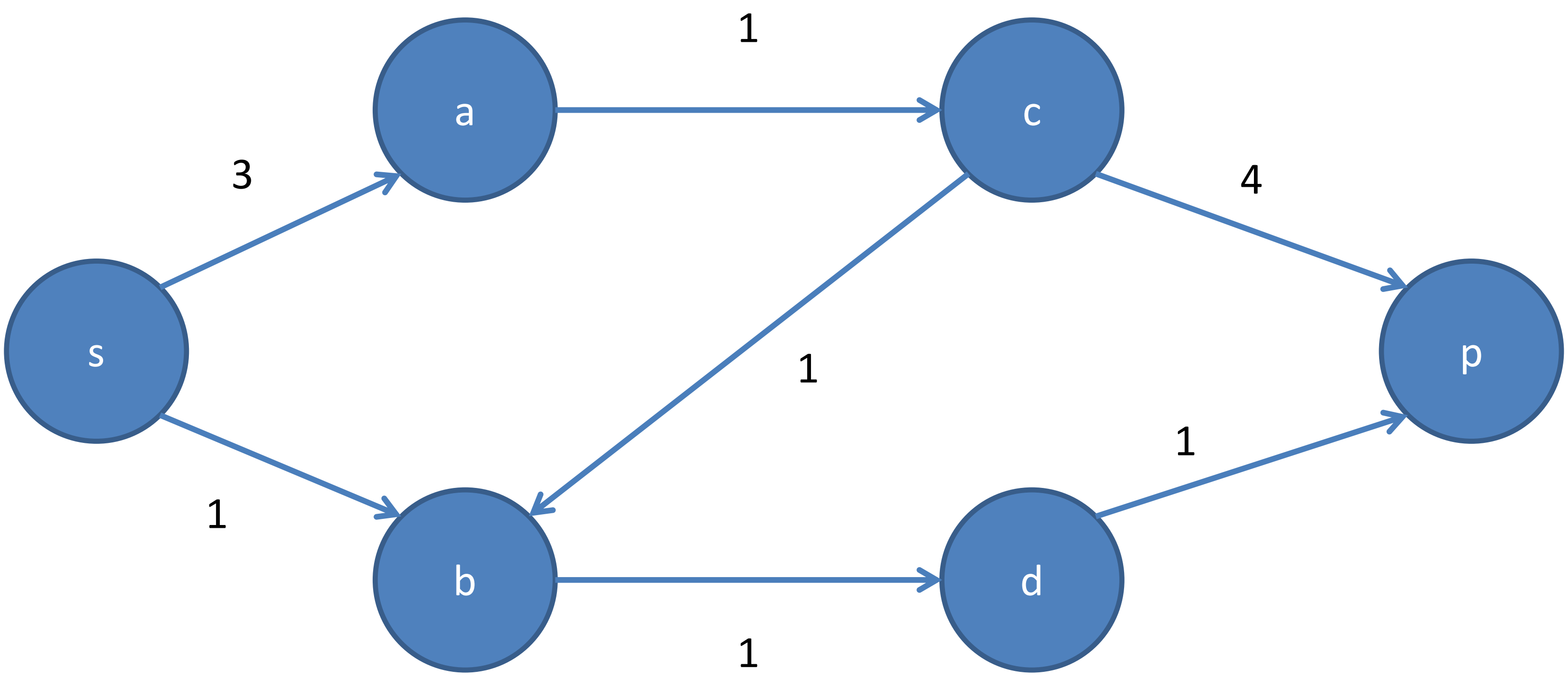
Que faire en cas de sources et/ou de puits multiples



Comment faire ?

- Chercher un chemin de s à p utilisant exclusivement des arcs de capacité non nulle
- Calculer la capacité de ce chemin (la plus faible capacité des arcs composant le chemin)
- Organiser un flot de s à p en suivant ce chemin.
- Recommencer si possible.

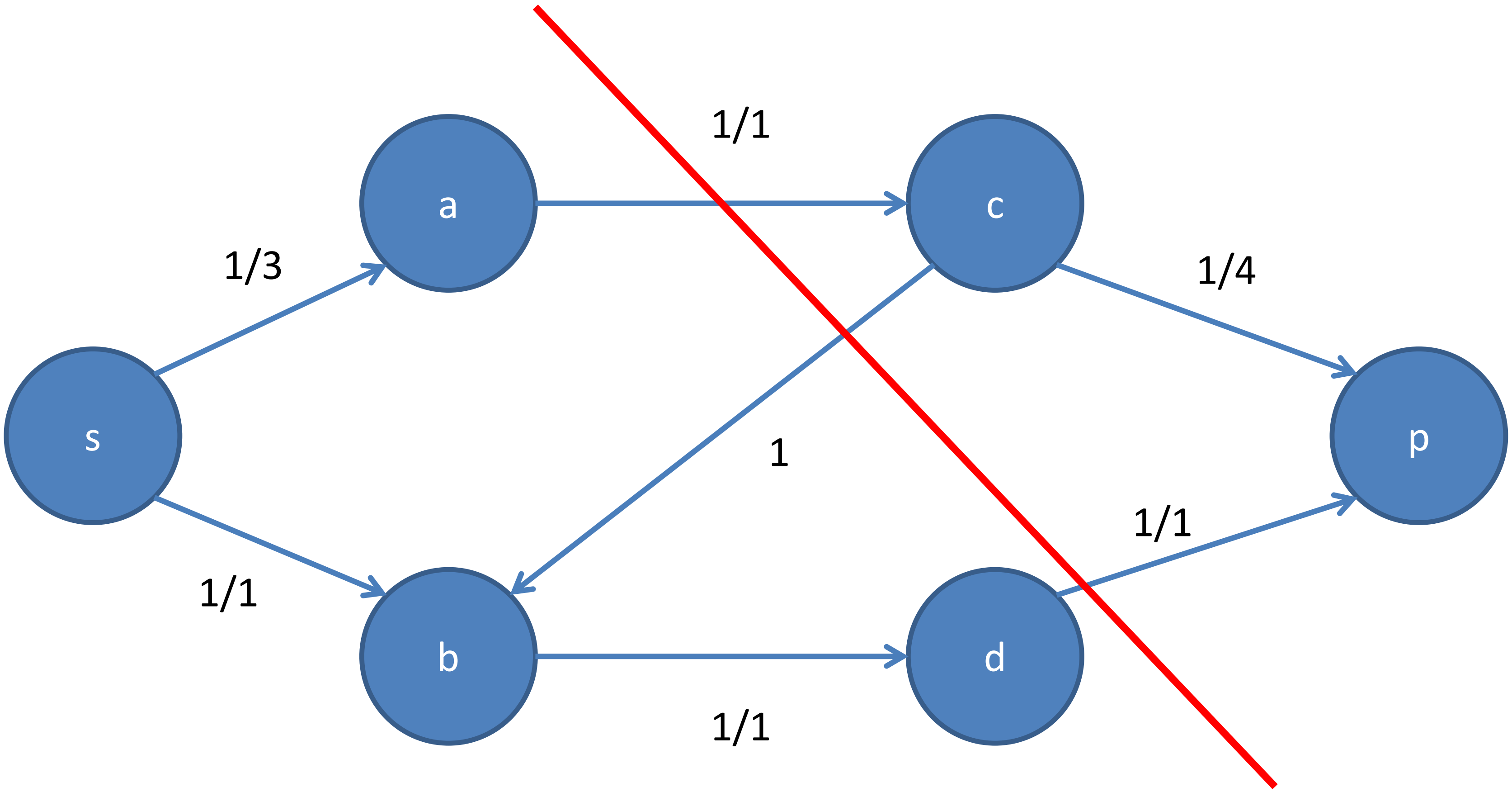
Comment faire ?



Comment faire ?

- On remarque que le chemin sacp permet d’acheminer 1 unité de s à p
- De même le chemin sbdp permet d’acheminer 1 unité de s à p.
- Ces deux chemins permettent de réaliser le flot maximal.

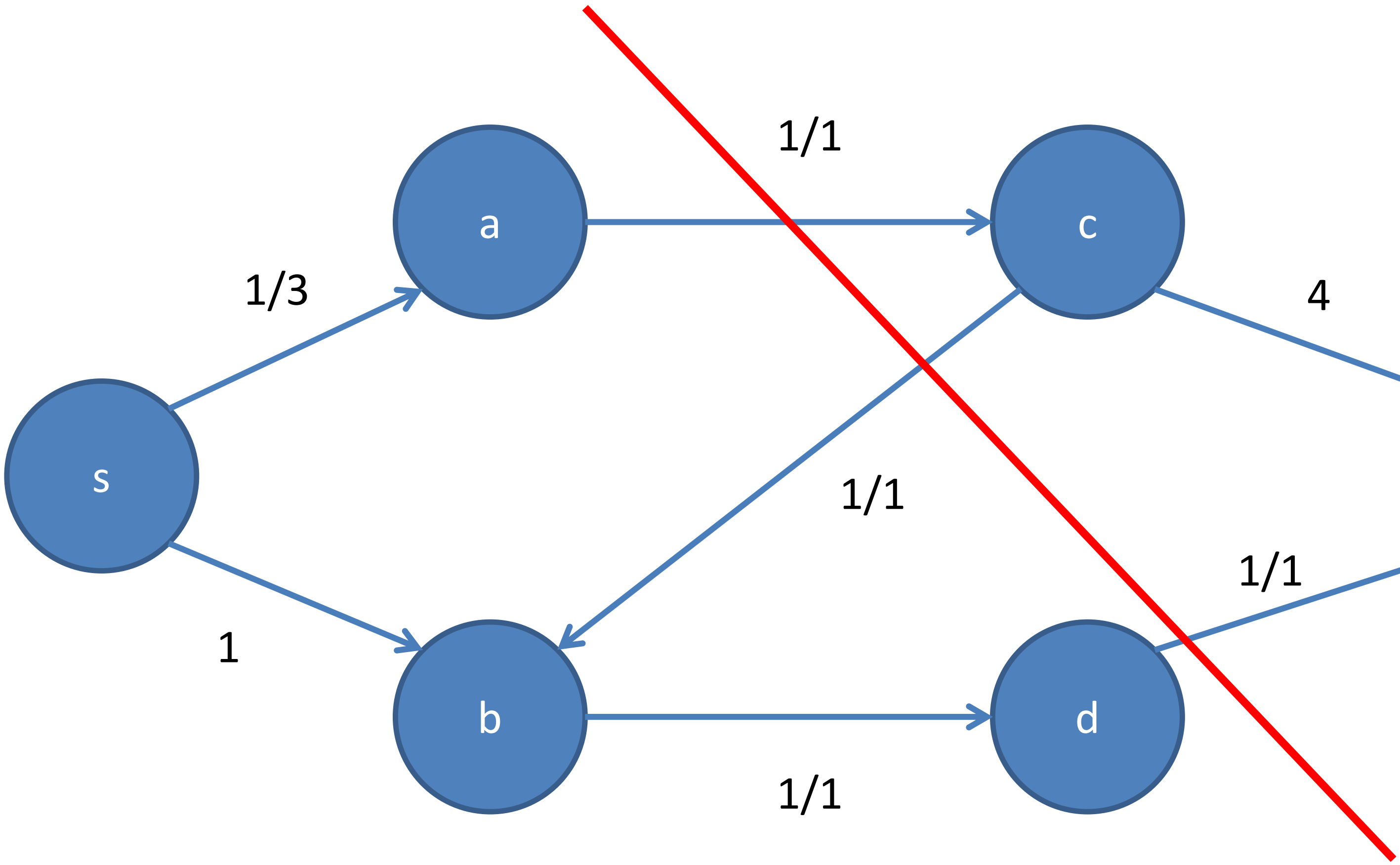
Comment faire ?



Comment faire ?

- On a eu de la chance voici un autre calcul :
- Le chemin sacbdp permet d'acheminer 1 de la source au puits. Mais si l'on utilise ce chemin il n'est pas possible, en l'état, de trouver un autre chemin pour améliorer le flot de s à p…

Comment faire ?



Remarque

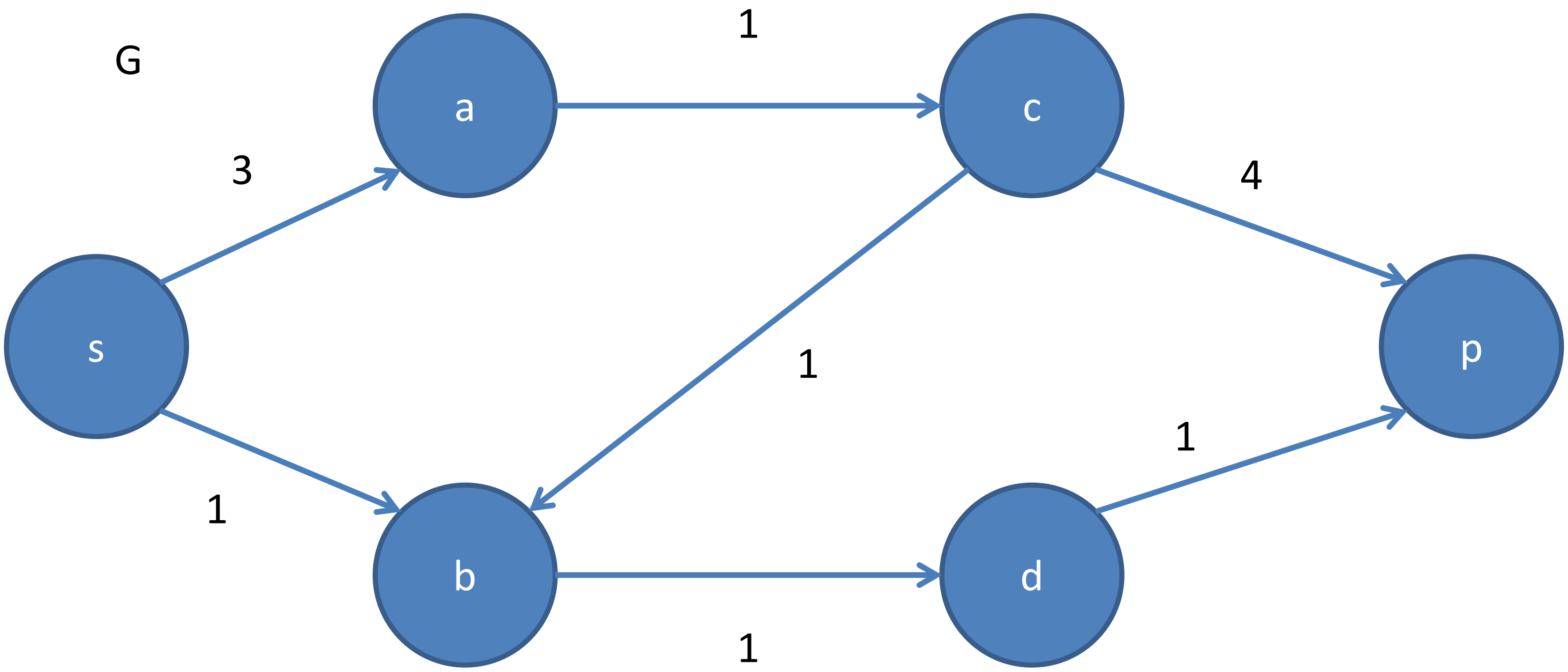
- Le flot maximal ne peut pas dépendre des chemins trouvés…

- Il faut trouver une représentation de notre réseau rendant possible la découverte de nouveaux chemins tant que le flot max n’est pas réalisé, c’est le réseau résiduel.

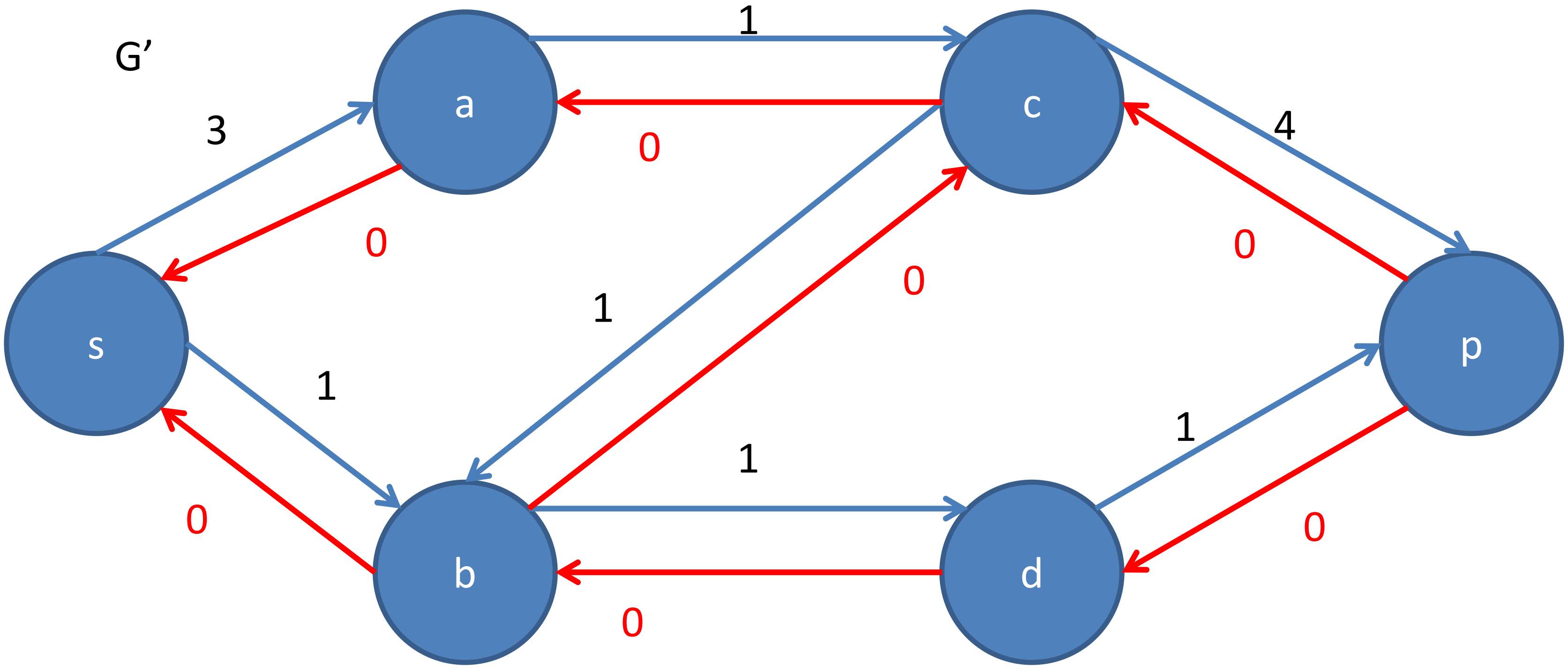
Réseau résiduel

- Soit G = (X, U, C) un graphe antisymétrique modélisant un réseau.
- On crée le réseau résiduel GR = (X’,U’,C’) que l’on construit de la façon suivante.
  - X’ = X
  - xy ϵ U’ si et seulement si xy ϵ U ou yx ϵ U (on symétrise le graphe G)
  - c’(xy) = c(xy) si xy ϵ U, c’(xy) = 0 sinon.

Construire le réseau résiduel



Construire le réseau résiduel



Faire évoluer le graphe résiduel

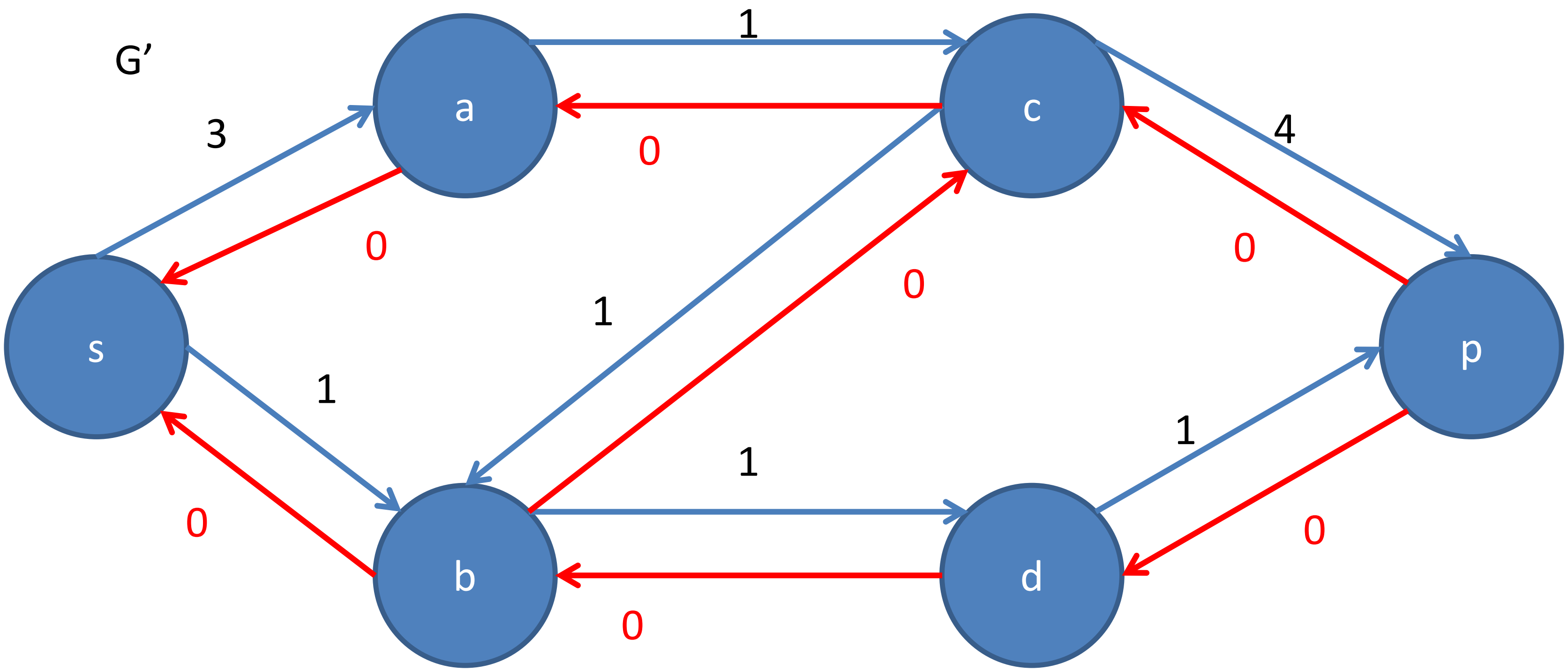
- Chercher un chemin $\mu = x_0 x_1 \ldots x_k$ liant s ($s = x_0$) à p ($p = x_k$)et n'utilisant aucun arc de capacité nulle.
- On calcule la capacité Cap(μ) de ce chemin μ

$$\mathrm{Cap}(\mu) = \mathrm{Min}_{0 \leq i < k}\, c'(x_i x_{i+1}).$$

- Pour chaque arc $x_i x_{i+1}$ du chemin μ
  - $c'(x_i x_{i+1}) \leftarrow c'(x_i x_{i+1}) - \mathrm{Cap}(\mu)$
  - $c'(x_{i+1} x_i) \leftarrow c'(x_{i+1} x_i) + \mathrm{Cap}(\mu)$

Faire évoluer le réseau résiduel

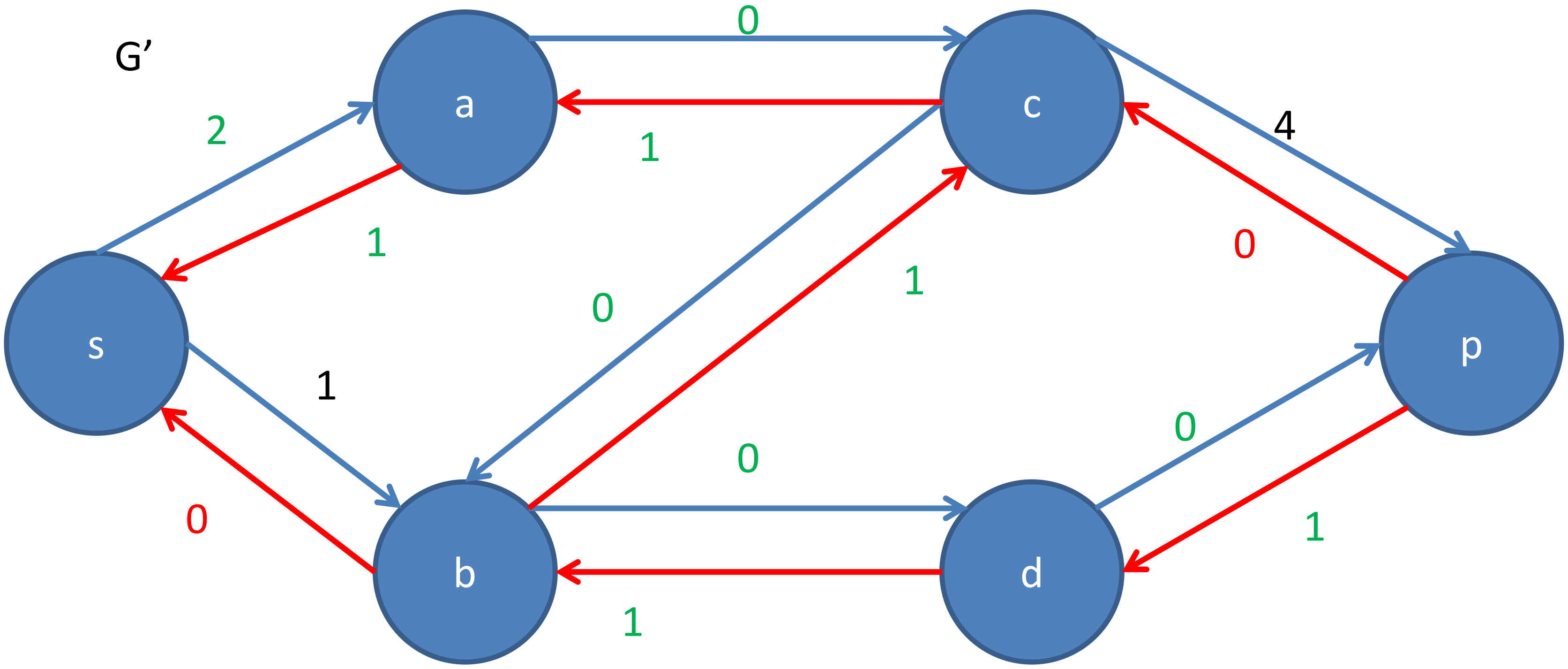
Chemin sacbdp



Capacité du chemin 1

Faire évoluer le réseau résiduel

Chemin sacbdp



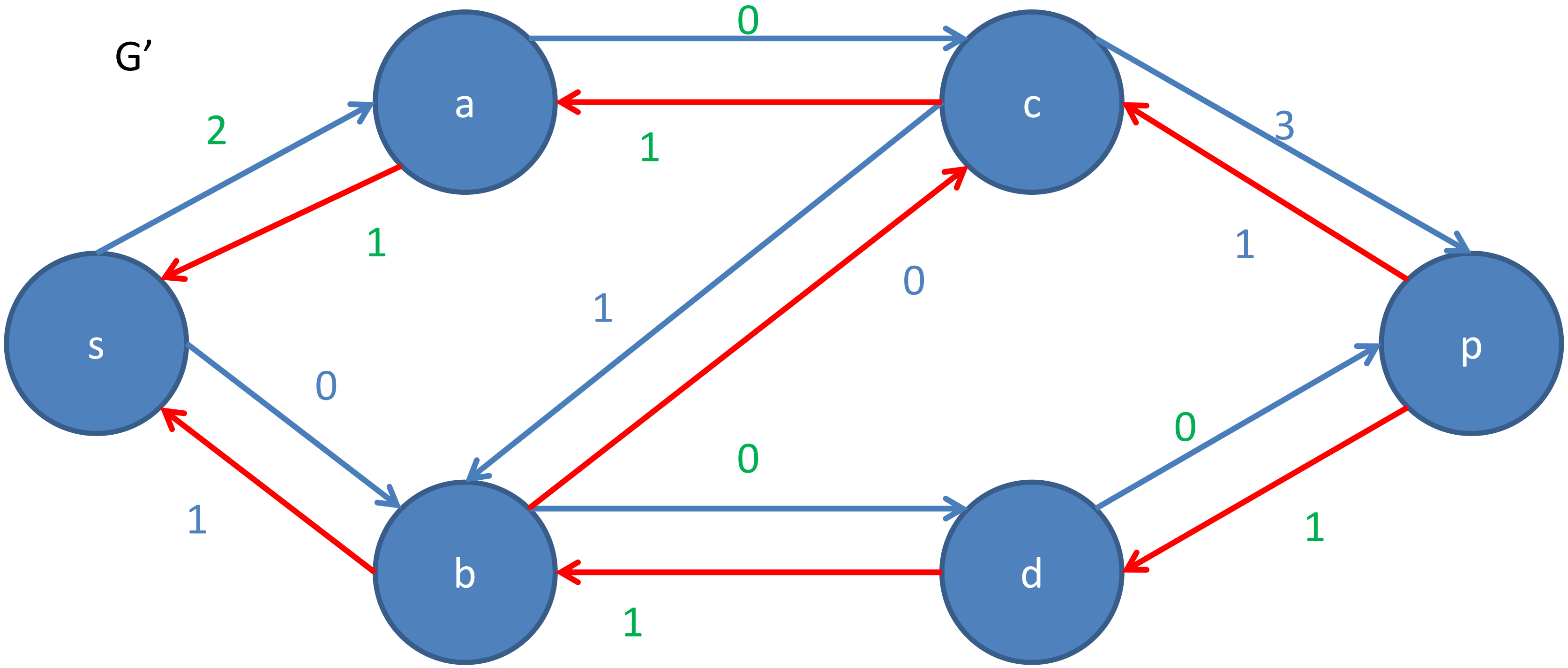
Capacité du chemin 1

Faire évoluer le réseau résiduel

- Il reste encore un chemin de capacité non nulle de s à p non pas dans le graphe initial mais dans le graphe résiduel sbcp qui est aussi de capacité 1.

Faire évoluer le réseau résiduel

Chemin sbcp



Capacité du chemin 1