Examen du mardi 6 janvier 2020 - Durée 2h00

L'usage de tout document ou appareil électronique (y compris calculatrice) est prohibé. Les réponses aux questions doivent être justifiées faute de quoi elles ne rapporteront aucun point, même si elles sont justes.

Exercice 1.

(a) On a 4 hélicoptères de tourisme, 4 pilotes et 8 stewards. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et stewards aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux stewards ?

(b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien de façons différentes y a-t-il pour que p hommes et p femmes s'assoient autour d'une table ronde de manière que chaque homme soit assis à côté de deux femmes ?

Exercice 2. Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

(a) Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

(i) a et b ;

(ii) a mais pas b ;

(iii) b mais pas a :

(iv) ni a ni b.

(b) En déduire la relation $\binom{12}{5} = \binom{10}{5} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{3}$.

(c) Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $1 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}.$$

(d) Retrouver par le calcul le résultat précédent.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

(a) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, où $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

(c) l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

Une suite d'entiers $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *presque nulle* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n = 0$.
Démontrer que l'ensemble des suites d'entiers presque nulles est dénombrable.
Indication. On pourra construire une bijection entre $A_p = \{(u_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} | u_n = 0,\ \forall n \geq p\}$ et $\mathbb{N}^p$.

Exercice 5.

Soient E un ensemble et $f : E^2 \to E$ une injection.

(a) Peut-on avoir E fini ?

(b) Prouver qu'on définit une injection $g : E^4 \to E$ par $g(x, y, z, t) = f(f(x, y), f(z, t))$.

(c) Si f est bijective, en est-il de même de g ?

Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques L2

Année 2019-2020
Suites et séries de fonctions

Examen - 7 janvier 2020- Durée 2h

La précision et la rigueur de la rédaction seront déterminantes pour la correction de cette épreuve. Vous pouvez utiliser des résultats de questions intermédiaires que vous ne savez pas démontrer, mais vous devrez dans ce cas préciser clairement ce qui est admis. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{8n^3+12n+1} z^n; \ \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}; \ \sum_{n\geq 0} \arctan n \ z^n; \ \sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n}}{n 2^n}.$$

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Etudier les variations de la fonction f_n.

(3) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

(4) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(5) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.

(6) Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(7) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $S'(x)$. On pourra montrer que $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

(8) Vérifier que pour tout n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{n}{k^2+n^2} \geq \frac{1}{5}$.

(9) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

(10) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(1) Justifier est f est DSE en 0 sur $]-1, 1[$.

(2) Montrer que f est solution l'équation différentielle sur $]-1, 1[$: $(1-x^2)y' - xy = 1$.

(3) En écrivant $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, montrer que $\forall n \geq 2, \ na_n = (n-1)a_{n-2}$.

(4) Calculer a_0 et a_1.

(5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

(6) En déduire le DSE en 0 de f sur $]-1, 1[$.

Exercice 4. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0] \\ \pi - 2x & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

(1) Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ et la série de Fourier associée à f.

(2) Enoncer le théorème de Dirichlet.

(3) Montrer que $\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} a_n(f) = \dfrac{\pi}{2}$.

(4) En déduire $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

(5) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^2}$.

(6) Enoncer la formule de Parceval.

(7) Montrer que $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{1}{(2k+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$

(8) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^4}$.

Université de Picardie Jules Verne
Mathématiques L2-S3
Année 2019-2020

Algèbre Linéaire 2

EXAMEN du 8 janvier 2020

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. L'épreuve dure deux heures. Justifier vos réponses.

---

1. (**Questions de cours**) Les trois questions suivantes sont indépendantes. Justifier vos réponses.

(1) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, sur un corps K commutatif. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1, E_2 sont des sous-espaces vectoriels non nuls de E, de dimensions k et $n-k$ respectivement. $(1 \leq k \leq n-1)$

- Soit f un projecteur sur E_1 parallèllement à E_2.

(i) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_f(x)$ de f.

(ii) f est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?

(iii) Donner le polynôme minimal $\mu_f(x)$ de f.

- Soit g une symétrie sur E_1 parallèllement à E_2.

(iv) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_g(x)$ de g.

(v) g est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?

(vi) Donner le polynôme minimal $\mu_g(x)$ de g.

(2) Soit u un endomorphisme nilpotent de E.

(i) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_u(x)$ de u.

(ii) Démontrer que u est trigonalisable.

(iii) Démontrer que l'indice de nilpotence de u est au plus égal à n, qui sera noté p. Déterminer le polynôme minimal $\mu_u(x)$ de u.

(3) Soit A la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.

(i) Calculer A^2. En déduire que si λ est une valeur propre de A, alors λ vaut 0 ou n. En déduire le polynôme minimal μ_A.

(ii) A est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?

(iii) Déterminer la dimension des espaces propres de A, puis en déduire le polynôme caractéristique sans calculer.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1-m & m+1 & m \end{pmatrix} \quad \text{où } m \text{ est un réel}$$

(1) Montrer que $P(x) = (x-m)(x-1)(x+1)$ est le polynôme caractéristique de f.

(2) En déduire :

(i) les valeurs de m pour lesquelles f est un isomorphisme.

(ii) les valeurs de m pour lesquelles f est trigonalisable.

(iii) que f est diagonalisable pour $m \neq 1$ et -1.

(3) On pose $m = 1$.

(i) Déterminer les sous-espaces propres ainsi qu'une base et la dimension. En déduire que f n'est pas diagonalisable pour $m = 1$.

(ii) Trigonaliser f (On donne une base de f et la matrice triangulaire supérieure associée). Ensuite, déterminer la décomposition de Dunford de A.

(4) On pose $m = -1$.

(i) Déterminer les sous-espaces propres ainsi qu'une base et la dimension. En déduire que f est diagonalisable pour $m = -1$.

(ii) Diagonaliser f (On donne une base de f et la matrice diagonale associée). Ensuite, déterminer $exp(f)$.

(5) Donner suivant les valeurs de m le polynôme minimal de f.

(6) Résoudre le système différentiel suivant où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = 2x - y + z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$$

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$, et f un endomorphisme <u>non diagonalisable</u> de E vérifiant $f \neq \lambda id_E$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ $\quad E = \ker(f - 3id_E) \oplus Ker(f - id_E)^2$.

(1) Montrer que $P = (x-3)(x-1)^2$ est un polynôme annulateur de f.

(2) En déduire le polynôme minimal $\mu_f(x)$ de f.

(3) Montrer que le polynôme caractéristique de f est sous la forme :

$$\chi_f(x) = (-1)^n (x-3)^k (x-1)^{n-k} \quad \text{où } 1 \leq k \leq n-2 \text{ et } \dim Ker(f - 3id_E) = k.$$

(4) En utilisant la division euclidienne des polynômes, exprimer pour tout entier n, f^n en fonction de f^2, f, id_E et n.

(5) (Bonus, 2pts) Donner e^f en fonction de f^2, f, id_E.
Indication : On utilisera l'expression

$$e^f = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n}{n!}.$$

Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2019-2020

Licence mention Mathématiques - Semestre 3
Statistique
Examen du mercredi 8 janvier 2020
Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1

1) Les dirigeants d'Alamo Rent-A-Car pensent que sur l'ensemble des voitures louées aux Etats-Unis en 2018, l'entreprise réalise 50% des locations de voiture.

Pour tester cette hypothèse, on sélectionne de manière aléatoire vingt grands aéroports des Etats-Unis sur lesquels sont implantés des agences de location de voitures. On envoie ensuite des enquêteurs enregistrer le nombre voitures louées pendant 4 heures. Il y en a 500 au total et on note que 240 d'entre elles l'ont été chez Alamo Rent-A-Car.

a) Préciser la population et la variable X étudiées, la taille d'échantillon et l'estimateur mis en jeu.

b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion de voitures louées chez Alamo Rent-A-Car.

c) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on doit rejeter l'hypothèse émise par les dirigeants d'Alamo Rent-A-Car. Préciser les hypothèses H_0 et H_1 de ce test et présenter les calculs effectués.

d) La p-valeur associée au test donnée par le logiciel R est p-value = 0,3711. Cela est-il cohérent avec la réponse obtenue au 1) c) ? Justifier la réponse.

e) Les résultats des questions 1) b) et c) sont-ils cohérents ? Justifier la réponse.

On suppose maintenant que l'hypothèse émise par les dirigeants d'Alamo Rent-A-Car est fausse ; autrement dit que la proportion de voitures louées par Alamo Rent-A-Car est égale à une valeur $p_1 \neq 0,5$.

f) Rappeler ce que représente la probabilité β d'erreur de deuxième espèce du test effectué au 1) c) et justifier (par le calcul) que pour un risque α donné, on a

$$\beta = P^{H_1}\left(\frac{0,5 - u_\alpha\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{500}} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{500}}} \leq \frac{F - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{500}}} \leq \frac{0,5 + u_\alpha\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{500}} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{500}}} \right).$$

g) On suppose que $p_1 = 0,46$ et on prend $\alpha = 0,05$. Calculer β et en déduire la puissance du test effectué au 1) c). Commenter le résultat.

2) Une deuxième enquête a été réalisée aux Etats-Unis en 2019 et a montré que sur 500 voitures louées, 210 l'ont été chez Alamo Rent-A-Car.

A partir des résultats des deux enquêtes, effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on peut considérer que la part de marché d'Alamo Rent-A-Car aux Etats-Unis a baissé entre 2018 et 2019.

3) En 2018, la répartition des parts de marché de location de voiture aux Etats-Unis était la suivante :

Entreprise	Alamo R-A-C	Avis-Budget	Hertz	Autres
Pourcentage de voitures louées	50%	25%	20%	5%

Ci-dessous les résultats d'une troisième enquête, menée en 2019 dans des aéroports des Etats-Unis :

Entreprise	Alamo R-A-C	Avis-Budget	Hertz	Autres
Nombre de voitures louées	460	300	195	45

a) Effectuer un test statistique au risque 5% pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que la répartition des parts de marché de location de voiture aux Etats-Unis en 2019 est conforme à la répartition de 2018 ? On présentera les hypothèses H_0 et H_1 du test et les calculs effectués.

b) En observant les calculs effectués, analyser le résultat de ce test en termes d'évolution des parts de marché.

Exercice 2

A l'occasion de la mise sur le marché d'un nouveau produit, on a observé un échantillon de consommateurs potentiels du produit et on a obtenu les résultats suivants :

Achat \ Genre	Homme	Femme	Total
Ont acheté le produit	10	20	30
N'ont pas acheté le produit	40	30	70
Total	50	50	100

1) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si l'achat du produit dépend du genre. On présentera les hypothèses H_0 et H_1 du test et les calculs effectués.

2) Le résultat de ce test permet-il de dire que certains consommateurs achètent plus le produit que d'autres ? Justifier la réponse.

Exercice 3

1) Dans une population donnée, on considère un caractère quantitatif, représenté par une variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ. On considère un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de taille n de X, et les estimateurs $\overline{X}$ et S_c (de μ et σ) dont la définition est rappelée dans le formulaire joint. Soit un réel $\alpha \in \,]0;1[$.

On suppose que $n \geq 30$. Justifier, en détaillant les calculs, que $\left[\overline{X} - \frac{S_c}{\sqrt{n}}u'_\alpha\ ,\ +\infty\right[$ est aussi un intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$.

Par opposition à l'intervalle de confiance bilatéral habituel, ce nouvel intervalle de confiance est qualifié d'unilatéral.

2) Depuis la fermeture, le 19 janvier 2012, du site de téléchargement direct et gratuit MegaUpload ordonnée par le gouvernement américain par l'intermédiaire du FBI, les sites légaux de télévision en replay (télévision de rattrapage) et de vente de VOD (video on demand) se félicitent d'une importante hausse de leur traffic. S'il est vrai que cette hausse a été flagrante dans les jours qui ont suivi la fermeture de MegaUpload, plus d'un mois après, cette tendance n'était pas si évidente.

En étudiant la fréquentation du site m6replay.fr (en pourcentage d'usagers de l'Internet) sur les deux années qui précèdent la fermeture de MegaUpload (avant le 19 janvier 2012), on constate qu'elle s'élève en moyenne à 0.021%.

Sur le site de mesures de traffic Internet alexa.com, on trouve une représentation graphique des fréquentations du site m6replay.fr mesurées à des instants réguliers (environ une mesure tous les jours) mais aléatoirement espacés (pas toutes les mesures aux mêmes heures) après la fermeture. On ne s'intéressera qu'à 40 mesures du pourcentage de fréquentation, celles réalisées entre le 20 janvier 2012 et le 29 février 2012, et qui ont donné une moyenne égale à 0.023% et un écart-type corrigé égal 0.005%.

a) Préciser la population et la variable X étudiées, la taille d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu et leur loi. Préciser l'éventuelle hypothèse à faire sur la variable étudiée pour pouvoir répondre aux questions b), c) et d) suivantes.

b) En utilisant le résultat du 1), déterminer un intervalle de confiance unilatéral au niveau 95% du pourcentage moyen de fréquentation du site m6replay.fr.

c) Effectuer un test statistique au risque 5% pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que le pourcentage moyen de fréquentation du site m6replay.fr a augmenté significativement avec la fermeture de MegaUpload ? Préciser les hypothèses H_0 et H_1 de ce test et présenter les calculs effectués.

d) Le résultat du 2) b) permettait-il de prévoir le résultat du test effectué au 2) c) ? Justifier la réponse.

Exercice 4

On s'intéresse au salaire mensuel net des anciens élèves d'un master de Mathématiques. On souhaite voir s'il existe une différence de salaire liée au genre. Sur deux échantillons aléatoires de diplomés, on a obtenu les résultats suivants :

Salaire	Effectif	Moyenne	Variance corrigée
Femme	40	4 200	2 160 000
Homme	60	5 000	2 000 000

1) Préciser la(es) populations et la(es) variable(s) étudiée(s), la(es) taille(s) d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu.

2) Effectuer un test statistique au risque 5% pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que les femmes diplomées d'un master de Mathématiques ont un salaire significativement moins élevé que celui les hommes diplomés d'un master de Mathématiques ? Préciser les hypothèses H_0 et H_1 de ce test et présenter les calculs effectués.

3) Si les deux échantillons avaient les mêmes moyennes et écart-types que dans le tableau ci-dessus, mais n'étaient constitués que de 11 femmes et 16 hommes, pourrait-on encore appliquer la méthode suivie au 2) ? Justifier la réponse. En cas de réponse négative, et supposant les échantillons gaussiens, mettre en oeuvre le(s) test(s) statistique(s) adapté(s).

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$: Student à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\overline{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_c^2$: Khi deux à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
p	$F = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$U = \dfrac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

2) Intervalles de confiance au niveau $1-\alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\ ,\ \bar{x} + \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 1-\alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha}s_c^2\ ,\ \frac{n-1}{a_\alpha}s_c^2\right]$	a_α et b_α tels que $P(Y^2 > a_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $P(Y^2 > b_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\ ,\ f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha \leq U \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

3) Tests de conformité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 1-\alpha$ t'_α tel que $P(T \leq t'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha \leq Y^2 \leq b_\alpha) = 1-\alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 > b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \dfrac{F-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha \leq U \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ u'_α tel que $P(U \leq u'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$, et remplacer t_α, t'_α et t''_α par u_α, u'_α et u''_α.

4) Tests d'homogénéité au risque α

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse $\mathbf{H_0}$	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \dfrac{S_{c,1}^2}{S_{c,2}^2}$: Snédécor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F > f_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{S_{c,1}^2}{n_1} + \dfrac{S_{c,2}^2}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{c,1,2}\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s_{c,1,2}^2 = \frac{(n_1-1)s_{c,1}^2+(n_2-1)s_{c,2}^2}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n - 1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})f_{1,2}(1-f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5$, $n_1(1-f_1) \geq 5$, $n_2 f_2 \geq 5$, $n_2(1-f_2) \geq 5$, avec $f_{1,2} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i. Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

Statistique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.

Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r - 1 - k$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D > b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants. Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

…tique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{i,j} - np_{i,j})^2}{np_{i,j}}$, avec $np_{i,j} = \dfrac{n_{i,\bullet}\, n_{\bullet,j}}{n}$, $n_{i,\bullet} = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ et $n_{\bullet,j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$.

…ous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r-1)(s-1)$ d.d.l.
… b_α tel que $P(D > b_\alpha) = \alpha$.

TABLE 1

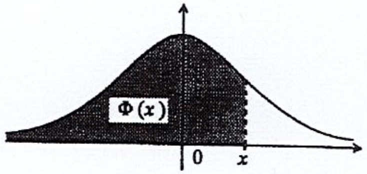
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

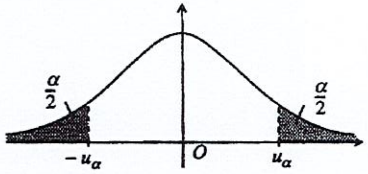
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$P(|U| \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

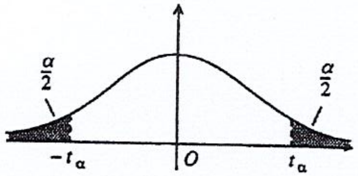


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(|T| \geqslant t_\alpha) = \alpha$.



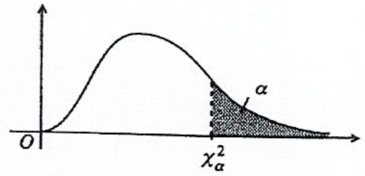
ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (*cf.* table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$.



ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,000 2	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire :

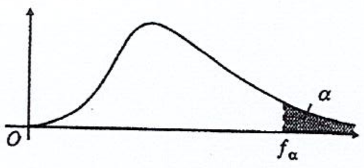
$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}025$.

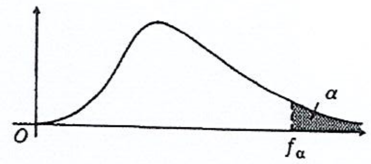


ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05$.



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00