

L2–Licence de Mathématiques

Intégration et Equations différentielles

Épreuve du 10/01/2020

L'usage de la machine à calculer n'est pas autorisé. Il en sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.

Exercices

1. Calculer les primitives suivantes en indiquant le ou les intervalles de \mathbb{R} où les résultats trouvés sont valables

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad b) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}, \quad c) \int \frac{dx}{x^3(1+x^3)}.$$

Pour b) on pourra poser $t = \sqrt{e^x-1}$.

2. Intégrer l'équation différentielle suivante

$$(1) \quad x(x^2+1)y' + (x^2-1)y = 1.$$

Existe-t-il des solutions de (1) définies sur \mathbb{R} ?

Problème 1

On considère l'équation différentielle

$$(2) \quad x^2y' + y(y-2x) = 0.$$

1. Trouver les solutions de (2).
2. Déterminer la solution y telle que $y = 4$ pour $x = 2$.

Problème 2

Intégrer l'équation différentielle suivante

$$(3) \quad x(x^2-1)y' + 2y = x^2.$$

Existe-t-il des solutions de (3) définies sur \mathbb{R} ?

Licence 2ème année – Théorie des graphes

Durée de l'épreuve : 2h00

Documents autorisés : tous documents papiers ou électroniques non connectés.

Portables non autorisés.

La notation prendra compte de la clarté et des justifications aux réponses.

L'examen est un peu long mais le barème en tiendra compte. Ceci vous permet de choisir les exercices qui vous conviennent le mieux.

Exercice 1 (3 pts) Dans une compétition où n équipes s'affrontent on observe, à un moment donné de la compétition, que

- 1 équipe a joué un seul match ;
- toutes les autres équipes ont joué 7 matchs sans jamais jouer 2 fois contre la même équipe ;
- en tout, 81 matchs ont été joués.

On modélisera la situation par un graphe puis on en déduira le nombre d'équipes dans la compétition (On ne demande pas de prouver que cette situation est réalisable).

Exercice 2 (3 pts) Trouver deux graphes avec la suite de degré $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$:

1. un graphe non planaire (justifier),
2. un graphe planaire.

Exercice 3 (7 pts) Le code d'entrée d'un immeuble est composé de trois chiffres valant 0 ou 1.

Considérer le graphe orienté où les mots de 2 lettres (00, 01, 10, et 11) sont les sommets et où les flèches sont de la forme (ab, bc) . Par exemple $(01, 11)$ est une flèche.

1. Tracer ce graphe.
2. Montrer qu'il existe une suite de lettres contenant chaque code de 3 lettres exactement une fois et donner la longueur de cette suite (c'est-à-dire le nombre de lettres qui la compose).
3. Une telle suite de lettres existe-t-elle lorsque l'alphabet est $\{0, 1, 2\}$?
4. Et en général pour l'alphabet $\{0, 1, \dots, n\}$? Lorsqu'elle existe, donner sa longueur.

Exercice 4 (4 pts) Il s'agit de déterminer un cycle de feux de croisement pour le carrefour schématisé en figure 1.

Quatres rues A , C , D et E sont en sens unique, et l'autre rue B est à double sens, les voitures roulant alors sur leur droite. Les flux de véhicules autorisés à circuler en même temps peuvent se fondre, mais jamais se croiser. Par exemple, les flux AB , EB , ou EC peuvent être autorisés en même temps. Par contre, les flux AD , EC ou EB , AC se croisent.

- 1) Représenter le graphe des incompatibilités des flux où chaque sommet est un flux (BC , EB , ...) et deux sommets sont reliés si et seulement s'ils sont incompatibles.
- 2) Par une coloration adéquate, proposer une solution au cycle des feux.

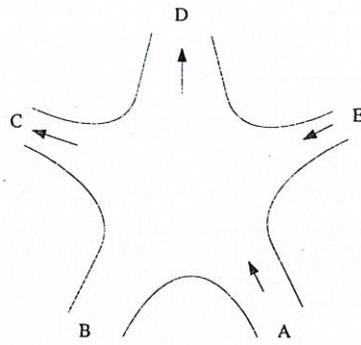


FIGURE 1 – carrefour

Exercice 5 (18 pts) Un producteur de cinéma est confronté au problème du planning de son prochain film selon les tâches suivantes :

Tâches	Opérations et contraintes	Durée (en jours)
T_1	Ecriture du scénario	32
T_2	Choix et recrutement des comédiens : commence au plus tôt 15 jours après le début de T_1	15
T_3	Choix du lieu du tournage : Au plus tôt après la fin de T_1 et commence au plus tard 4 jours après le début de T_2	2
T_4	Découpage technique : commence au plus tôt lorsque T_1 et T_3 sont terminées	4
T_5	Préparation des décors : commence au plus tôt lorsque T_3 et T_4 sont terminées	8
T_6	Tournage des extérieurs : commence au plus tôt lorsque T_1 , T_2 , T_3 et T_4 sont terminées	10
T_7	Tournage des intérieurs : commence au plus tôt lorsque T_4 , T_5 et T_6 sont terminées	12
T_8	Synchronisation : commence au plus tôt lorsque T_6 et T_7 sont terminées	10
T_9	Montage : commence au plus tôt lorsque T_8 est terminée	14
T_{10}	Accompagnement sonore : commence au plus tard 1 jour avant le début de T_9 , et, au plus tôt après la fin de T_8	10
T_{11}	Mixage : commence au plus tôt lorsque T_9 et T_{10} sont terminées	6
T_{12}	Tirage de la copie : commence au plus tôt 2 jours après la fin de T_{11}	1

- (2,5 pts) Donner un graphe potentiel-tâche G représentant les contraintes du projet en complétant le graphe en annexe, c'est-à-dire en indiquant les valuations des flèches lorsqu'elles sont manquantes et en indiquant le sens des flèches.

2. (3 pts) Pour chacun des ordonnancements suivants, dire s'il est compatible avec les contraintes du projet ?

(a)

tâches	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_i	0	0	15	20	30	34	35	45	57	60	63	74	85

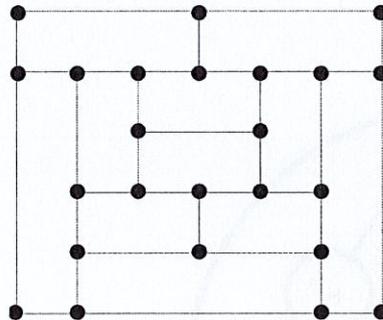
(b)

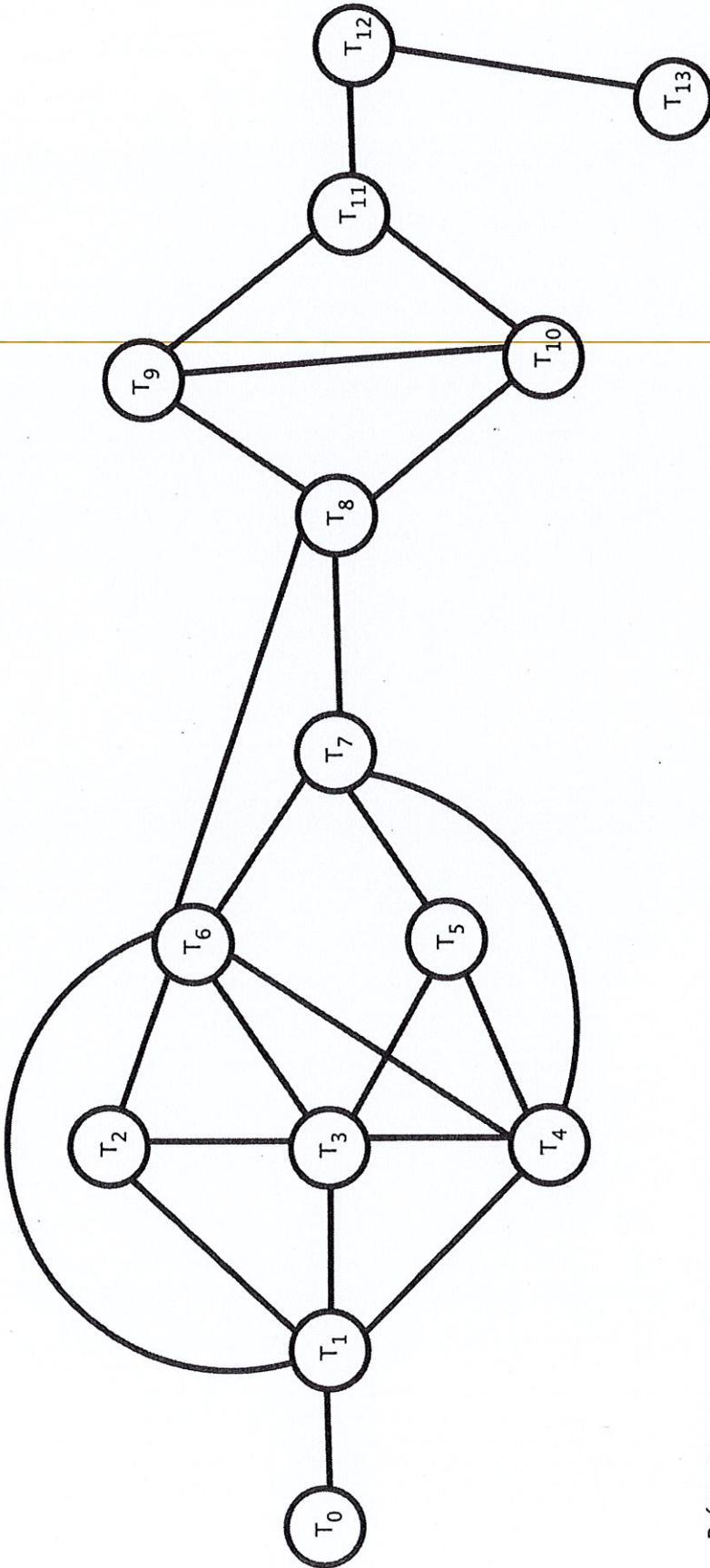
tâches	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_i	0	0	16	21	32	36	37	48	60	64	65	78	86

On indiquera toutes les incompatibilités avec les contraintes.

3. (1,5 pts) Donner une représentation de G où les sommets sont rangés en niveaux.
4. (2,5 pts) Donner un ordonnancement au plus tôt du projet en utilisant l'algorithme de Bellman simplifié dont on indiquera les principales étapes. Donner les dates au plus tôt de chacune des tâches du projet. ainsi que la durée minimale du projet ?
5. (1 pt) Donner une représentation sagittale du graphe réciproque G^{-1} de G .
6. (1,5 pts) Donner la décomposition en niveaux de G^{-1} .
7. (3+1 pts) Calculer un ordonnancement au plus tard du projet relativement la date de $T' = 90$ (on prendra soin d'indiquer les principales étapes du déroulement de l'algorithme employé), ainsi que les marges des différentes tâches.

Exercice 6 (2pts) Montrer que le graphe suivant est hamiltonien.





Prénom :
 NOM :