UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
UFR des sciences
Département de Mathématiques.
Semestre 5 : Calcul Différentiel 2

CC.2 : Session 1 du 06 janvier 2020
(Durée 2 heures)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Soit E un espace verctoriel de dimension finie $n \geq 2$, muni d'un produit scalaire noté $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ et de norme associée notée $||\,.\,||$. Soit $f : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant la proposition suivante :

$$\textit{Il existe une fonction} \quad g : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \quad \textit{telle que :}$$
$$\forall x \in E\setminus\{0\}, \quad \forall h \in E, \quad Df(x)(h) = g(x)\,\langle\, x\,|\,h\,\rangle.$$

1) Ecrire la proposition précédente, lorsque $E = \mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne usuelle) en utilisant les dérivées partielles de f.

2) Soit $r > 0$ un réel strictement positif et

$$\varphi_r(x) = f\Big(\frac{r\,x}{||\,x\,||}\Big).$$

Montrer que φ_r est différentiable et déterminer sa différentielle.

3) En déduire que f est constante sur la sphère

$$S(r) = \{x \in E \,/\, ||\,x\,|| = r\}.$$

4) Montrer qu'il existe une fonction dérivable $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in E\setminus\{0\}, \quad f(x) = F(||\,x\,||).$$

5) Calculer $F'(r)$ quand $g(x) = \exp(-||\,x\,||)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$, la relation

$$(x^2+y^2)\,z^2 = 1 - (x^2-y^2)\,\mathrm{e}^z.$$

1) Montrer qu'on peut définir au voisinage du point $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$, une fonction implicite φ de classe C^1 vérifiant

$$\varphi(1,0) = 0 \quad \text{et} \quad (x^2+y^2)\Big(\varphi(x,y)\Big)^2 = 1 - (x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{\varphi(x,y)}.$$

2) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ en $(1,0)$.

3) Donner le développement limité de φ au voisinage de $(1,0)$ à l'ordre 1.

Exercice 3 : En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, trouver les extrema de la restriction au cerlcle $x^2 + y^2 = 1$ de la fonction

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(*) \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(tx, ty) = t^k\, f(x, y).$$

1) Montrer que f vérifie

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k\, f(x, y).$$

2) On suppose en plus que f est solution de l'équation

$$(**) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Montrer que f vérifie

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k(k-1)\, f(x, y).$$

3) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$h(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Vérifier que

$$h'' + k^2\, h = 0.$$

Déterminer toutes les fonctions vérifiants $(*)$ et $(**)$.

Barème /22 : (*donné à titre indicatif*)

Exercice 1 : *08 pts*, Exercice 2 : *04 pts*, Exercice 3 : *04 pts*, Exercice 3 : *06 pts.*

Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques S5

Année 2019-2020

Examen d'Intégration et Probabilités

le lundi 6 Janvier 2020, 13h30-16h30 (3 heures), Amphi Lavoisier

Attention: *Documents non autorisés. On s'attachera à rédiger de façon claire, précise et concise, et à justifier l'utilisation des résultats du cours. Le barème n'est qu'indicatif.*

Exercice I. [Questions de cours] (5 points)

I.1. (1 pts) Donner les définitions exactes des notions suivantes:
l'espace mesuré,
la convergence en mesure d'une suite de fonctions mesurables.

I.2. (1 pts) Enoncer le lemme de Fatou.

I.3. (1 pts) Décrire l'inégalité de Hölder.

I.4. (1 pts) Pour quels paramètres $a > 0$ et $b > 0$, la fonction $1_{]0,1[}(x)x^{-a} + 1_{[1,+\infty[}(x)x^{-b}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$? Donner une fonction borélienne qui n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[1, 2]$.

I.5. (1 pts) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\sin(nx)}{n \sin x} dx.$$

Exercice II. [Calcul de l'intégrale de Gauss] (2 points)

Calculons l'intégrale de Gauss $G = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

II. 1. (0,5 pts) Montrer d'abord que

$$G^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

II.2 (1,5 pts) Ensuite, calculer G^2 en faisant un changement de variable, et puis en déduire la valeur de G.

Exercice III. [Comportement à l'infini d'une fonction intégrable] (4 points)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Nous allons montrer que*

$$p.p. \quad \forall a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^a} = 0. \qquad (L)$$

où "p.p." représente "presque partout" (au sens de Lebesgue) .

III.1. (0,5 pts) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f(nx)|dx = \frac{\|f\|_1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
III.2. (1 pts) Montrer que pour tout $a > 0$ on a $\int_{\mathbb{R}} F_a(x)dx < \infty$ où

$$F_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}|f(nx).$$

III.3. (1 pts) En déduire que pour tout $a > 0$, on a $F_a(x) < \infty$ p.p..

III. 4. (1 pts) Conclure pour (L).

Exercice IV. [Méthode de Laplace] (9 points)

Soit $f \in L^1(]0,1[)$. Supposons que f admet une limite $f(1^-)$ non-nulle à gauche en 1, i.e. la limite $f(1^-) := \lim_{x\uparrow 1} f(x) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existe. Nous proposons de montrer l'équivalent

$$I_n := \int_0^1 x^n f(x)dx \sim \frac{f(1^-)}{n} \quad (n \to +\infty). \qquad (E)$$

La formule de changment de variable sera utile.

IV.1. (1 pts) Montrer que I_n tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

IV.2. (1 pts) Sous la condition $f \in C^1([0,1])$, par une intégration par parties, montrer que

$$nI_n = \frac{n}{n+1}\left(f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx\right).$$

IV.3. (1 pts) En déduire que (E) est vraie si $f \in C^1([0,1])$.

IV.4. (1 pts) Montrer, par l'absurde, qu'en général, on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n pour obtenir (E).

Alors, dans la suite, on découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^a x^n f(x)dx + \int_a^1 x^n f(x)dx \qquad (0 < a < 1).$$

IV.5. (1 pts) Justifier qu'il existe $0 < a_0 < 1$ et $M > 0$ tels que $|f(x)| \leq M$ sur $[a_0, 1]$.

IV.6. (1,5 pts) Montrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{a_0} x^n f(x)dx = 0.$$

IV.7. (1,5 pts) Montrer que

$$n\int_{a_0}^1 x^n f(x)dx = \int_{a_0^n}^1 y^{1/n} f(y^{1/n})dy,$$

et en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{a_0}^1 x^n f(x)dx = f(1^-).$$

IV. 8. (1 pts) Conclure pour (E).

GÉOMÉTRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE

Examen Géométrie Affine et Euclidienne

Documents et Calculatrices interdits

Le barème tiendra compte de la longueur et de la difficulté de l'énoncé

1. Exercice

On considère l'ensemble des matrices symétrique rélles dans $M_2(\mathbb{R})$, i.e.

$$S = \{M \in M_2(\mathbb{R}); M = M^*\},$$

où M^* est la matrice transposée de M. Soit Tr M la trace de la matrice M.

1) Démontrer que S peut être vu comme un espace affine de dimension 3. Donner un repère affine de S.

2) Démontrer que $P = \{M \in S; \mathrm{Tr}M = 2\}$ est un plan affine de S dont on précisera la direction.

3) Quel est l'intersection de ce plan avec la droite passant par O et de direction $\mathbb{R}Id$?

2. Exercice

On se place ici dans $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien. On considère C le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soient $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$.

Soit $M = (x, y)$ un point quelconque du cercle.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

2) Démontrer que par le point M il ne passe qu'une seule droite telle que l'intersection de cette droite et du cercle soit réduite à un point.

3. Exercice

On se place ici dans $\mathcal{E}$ le plan affine euclidien. On considère les points $O = (0,0), A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.

On considère une application affine u qui vérifie $u(0) = (3,0)$, $u(B) = (4,0)$ et $u(A) = (3,1)$.

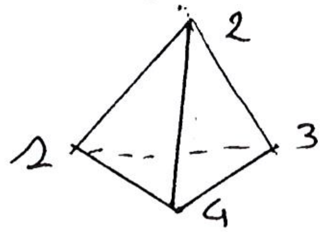
1) Montrer que u est une bijection affine.

2) L'application u est-elle une isométrie ?

3) Trouver toutes les applications affines solutions.

4. Exercice

On considère T un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$ l'espace affine euclidien de dimension 3.



On numérote les sommets de T par les nombres $\{1,2,3,4\}$. On appelle Σ l'ensemble des sommets du tétraèdre.

1) Calculer le diamètre du tétraèdre.

Soit u une isométrie affine qui laisse le tétraèdre globalement invariant.

2) Démontrer que u laisse le tétraèdre globalement invariant si et seulement si u est une application affine qui envoie Σ sur Σ.

3) Trouver toutes les isométries affines qui laissent T globalement invariant, et chaque point de l'arrête [12] invariant.

4) Trouver toutes les isométries affines *directes* qui laissent T globalement invariant.

Université de Picardie Jules Verne
Faculté des Sciences

2019-2020
L3 S5

Groupes, anneaux, corps - Examen
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Question de cours :

1. Enoncer et démontrer le théorème de la base téléscopique.
2. Enoncer la propriété de multiplicativité des degrés (pour les extensions de corps).
3. Soit K un corps et soit $P \in K[X]$. Qu'est-ce qu'un corps de décomposition de P sur K ?

Exercice préparé : Soit G un groupe.

1. Montrer que l'application $G \times G \to G$ envoyant (g, h) sur ghg^{-1} est une action de G sur lui-même (appelée action par conjugaison).
2. Expliciter tous les éléments du groupe symétrique S_3 et déterminer ses orbites sous l'action par conjugaison.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que G est d'ordre fini n et qu'il possède exactement trois classes de conjugaison. Montrer qu'il existe $a \geq b > 0$ deux entiers divisant n tels que $\frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
4. Montrer que $b \leq 3$ et en déduire toutes les valeurs possibles pour le triplet (n, a, b).
5. Déterminer tous les groupes finis ayant exactement trois classes de conjugaison.

Exercice non préparé : On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, on pose $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$. Il est donc commutatif et intègre.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $N(z) \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que l'ensemble des inversibles $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]^\times$ est $\{-1, 1\}$.
4. En imitant la démonstration vue en cours pour $\mathbb{Z}[i]$, montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien.
5. Pourquoi $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est-il principal ?
6. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$ premier et soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $N(z) = p$. Montrer que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
   (b) Décomposer 2 en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
   (c) Quels sont les diviseurs de 2 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
7. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $m^2 + n^2 = p^2$ et $m^2 - n^2 = q^2$.
   (a) Montrer que m et n n'ont pas la même parité.
   (b) Montrer que p et q sont impairs.
   (c) En déduire que n est pair et m impair.

(d) Montrer que q et n sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$.

(e) En déduire que q et n sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

8. Calculer $(q + in\sqrt{2})(q - in\sqrt{2})$.

9. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ irréductible divisant à la fois $(q + in\sqrt{2})$ et $(q - in\sqrt{2})$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

   (a) Montrer que z divise à la fois $2q$ et $2in\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

   (b) Montrer que z ne divise pas 2 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

   (c) En conclure que $(q + in\sqrt{2})$ et $(q - in\sqrt{2})$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

10. En déduire que $(q + in\sqrt{2})$ est un carré dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

11. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(q + in\sqrt{2}) = (a + ib\sqrt{2})^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}$ et que a est impair.

12. *On peut en déduire, par des arguments de divisibilité simples (mais un peu longs) qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^2 + v^2$ et $u^2 - v^2$ sont des carrés dans $\mathbb{Z}$ et $u^2 + v^2 < n^2 + m^2$.* En déduire qu'il n'existe pas d'entiers tous deux non nuls m et n tels que $m^2 + n^2$ et $m^2 - n^2$ sont des carrés dans $\mathbb{Z}$.

13. Résoudre $x^4 - y^4 = z^2$ dans $\mathbb{N}$.

Examen final "Géométrie et nombres complexes"

Janvier 2020

Exercice 1

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, on admet que les trois sous-ensembles ci-dessous sont des groupes pour la multiplication des nombres complexes :

- $\mathbb{C}^*$: l'ensemble des nombres complexes non-nuls,
- $\mathbb{R}^{*+}$: l'ensemble des nombres réels strictement positifs,
- S^1 : l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

On rappelle que si G et H sont deux groupes alors $G \times H$ est aussi un groupe pour la loi interne $(g, h).(g', h') = (gg', hh')$.

Question 1. (1,5) Montrer que l'application ci-dessous est un morphisme de groupes :

$$mult : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \times S^1 \to \mathbb{C}^* \\ (r, u) \mapsto r.u \end{cases}$$

montrer que ce morphisme est un isomorphisme.

Question 2. (1,5) Montrer que l'application ci-dessous est un morphisme de groupes :

$$m : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^{*+} \\ z \mapsto |z| \end{cases}$$

appliquer le 1er théorème d'isomorphie à m afin de trouver une relation entre $\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^{*+}, S^1$.

Question 3. (1) Soit θ un angle (défini modulo 2π) et z_0 un nombre complexe donner l'expression de la rotation de centre M_0 point du plan d'affixe z_0 et d'angle θ sous la forme d'une similitude directe $z \mapsto az + b$.

Question 4. (2) L'ensemble des rotations du plan (angle et centre quelconques) est-il un sous-groupe du groupe des similitudes directes? Même question si on considère toutes les translations.

Question 5. (1,5) A quelles conditions sur les nombres complexes a et b la similitude directe $\phi(z) = az + b$ est-elle une rotation?

Question 6. (1,5) Montrer que le sous-ensemble

$$\mathcal{R} = \{z \mapsto e^{i\theta}z + b\}$$

des similitudes directes forme un sous-groupe distingué. Ce sous-groupe est-il abélien?

Question 7. (1,5) Montrer que l'application $\psi : \mathcal{R} \to S^1$ donnée par $\psi(z \mapsto e^{i\theta}z + b) = e^{i\theta}$ est un morphisme de groupe surjectif, vous déterminerez son noyau. Puis vous appliquerez le 1er théorème d'isomorphie à ψ.

Question 8. (1,5) Montrer que les rotations et les homothéties engendrent le groupe des similitudes directes.

Exercice 2.

Question 1. (2) Montrer que si q est un quaternion imaginaire pur, c'est-à-dire si $q = a.i + b.j + c.k$ alors q^2 est un nombre réel négatif. La réciproque de ce résultat est-elle vraie? Que peut-on dire sur q un quaternion quelconque si q^2 est un réel positif?

Question 2. (5) Soit Q_8 le sous-ensemble des quaternions formé par les 8 éléments :

$$\{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe pour la multiplication, vous calculerez l'ordre de chacun des éléments de ce groupe et déterminerez tous ses sous-groupes.

Question 3. (4) On rapelle que le groupe des quaternions de norme 1 agit par conjugaison sur les quaternions imaginaires purs, on considère l'action induite par le quaternion $w = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$:

$$q \mapsto w.q.w^{-1}.$$

En identifiant les quaternions imaginaires purs avec $\mathbb{R}^3$ et en considérant la base $\{i, j, k\}$ vous déterminerez la matrice de l'application $q \mapsto wqw^{-1}$ dans cette base et donnerez la nature de cette transformation de l'espace.

Examen de première session de Théorie des jeux L3 S5 2019-2020

Les documents de cours sont autorisés.

Partie A (Un jeu à somme nulle) :

Soit $\mathcal{N}$ le jeu à somme nulle associé à la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que cela signifie qu'il s'agit d'un jeu à deux joueurs, A et B, le joueur A choisit une ligne, i, le joueur B une colonne, j, le paiement de A par B est le coefficient g_{ij} de la matrice G.

1) a) Calculer, s'il y en a, les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu.

b) Ce jeu admet-il une valeur ?

2) On considère maintenant l'extension mixte de $\mathcal{N}$.

La stratégie mixte "$s.ligne1 + (1-s)ligne2$" avec $s \in [0,1]$ disponible à A est noté simplement s.

La stratégie mixte "$t.colonne1 + (1-t).colonne2$" avec $t \in [0,1]$ disponible à B est notée simplement t.

a) Calculer $g(s,t)$ le paiement de A par B pour le profil mixte (s,t) .

b) Soit $s_0 \in [0,1]$ la stratégie mixte t_0 est une "meilleure réponse" de B à s_0 lorsque

$$\forall t \in [0,1], g(s_0,t_0) \leq g(s_0,t)$$

Quelle est (ou sont) la (ou les) meilleures réponses de B à s_0 ?

b') Soit $t_0 \in [0,1]$ la stratégie mixte s_0 est une "meilleure réponse" de A à t_0 lorsque

$$\forall s \in [0,1], g(s_0,t_0) \geq g(s,t_0)$$

Quelle est (ou sont) la (ou les) meilleures réponses de A à t_0 ?

c) Calculer les profils équilibres de Nash de l'extension mixte de $\mathcal{N}$.

d) Quelle est la valeur de l'extension mixte de $\mathcal{N}$?

Partie B (Partie fictive)

Soit $\mathcal{J} = [(A,B),(S,T)(g_A,g_B)]$ un jeu fini à deux joueurs. On rappelle que cela signifie que S et T, les ensembles de stratégies disponibles respectivement au joueur A et au joueur B, sont finis et que g_A et g_B sont des fonctions de $S \times T$ vers $\mathbb{R}$, $g_A(s,t)$ représentant le paiement de A et $g_B(s,t)$ celui de B lorsque A choisit la stratégie s et B la stratégie t.

Une partie est une suite $(s_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $S \times T$.

Une partie $(s_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant fixée, on pose

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \text{ et } \tau_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$$

1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, σ_n et τ_n sont des stratégies mixtes de A et de B. Que représentent-elles ?.

Une partie est dite fictive si chaque joueur choisit au tour $n+1$ une stratégie qui est meilleure réponse à la stratégie σ_n (pour le joueur B) ou τ_n (pour le joueur A).
2) Soit $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une partie. Exprimer σ_{n+1} et τ_{n+1} en fonction de σ_n, τ_n, s_{n+1} et t_{n+1}.
3) On suppose que (s,t) est un équilibre de Nash du jeu $\mathcal{J}$ en stratégie pure. Montrer que, pour une partie fictive $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, si pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $(s_{n_0}, t_{n_0}) = (s,t)$ alors à partir du rang n_0 la partie est stationnaire.

Partie C

On reprend le jeu $\mathcal{N}$ de la partie A. Une partie est donc une suite de profils $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in \{0,1\}$ et $t_n \in \{0,1\}$. Chaque tour donne lieu au paiement $g_{s_n t_n}$.
1) On pose $MR_2 : [0,1] \to \{0,1\}$ l'application telle que $MR_2(s) = 1$ si 1 est une réponse de B à la stratégie s de A strictement meilleure que 0 et $MR_2(s) = 0$ sinon. De même $MR_1 : [0,1] \to \{0,1\}$ l'application telle que $MR_1(t) = 1$ si 1 est une réponse de A à la stratégie t de B strictement meilleure que 0 et $MR_1(t) = 0$ sinon.

a) Calculer les fonctions MR_1 et MR_2.

b) Calculer les 5 premier tours de la partie fictive dont le premier tour est $(s_1, t_1) = (0,0)$.

c) Exprimer les stratégies moyennes σ_{n+1} et τ_{n+1} en fonction de σ_n et τ_n.

2) On considère une suite de couples de réels, $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, satisfaisant

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{nx_n}{n+1}, \frac{ny_n}{n+1}\right) & \text{si} \quad x_n \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ et } y_n \in [0, \frac{1}{4}] \\ \left(\frac{nx_n}{n+1}, \frac{ny_n+1}{n+1}\right) & \text{si} \quad x_n \in [0, \frac{1}{2}[\text{ et } y_n \in [0, \frac{1}{4}] \\ \left(\frac{nx_n+1}{n+1}, \frac{ny_n}{n+1}\right) & \text{si} \quad x_n \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ et } y_n \in]\frac{1}{4}, 1] \\ \left(\frac{nx_n+1}{n+1}, \frac{ny_n+1}{n+1}\right) & \text{si} \quad x_n \in [0, \frac{1}{2}[\text{ et } y_n \in]\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

a) Soit $n \geq 1$, montrer que si $(x_n, y_n) \in [0,1] \times [0,1]$ alors $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in [0,1] \times [0,1]$

b) On suppose ici que la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que son premier terme (x_1, y_1) est dans $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Montrer que la limite ne peut être que le couple $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

c) On ne suppose plus que la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge mais son premier terme (x_1, y_1) est encore dans $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Montrer qu'une valeur d'adhérence de cette suite ne peut être différente de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

3) Que pouvez-vous dire de la suite $(\sigma_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
4) Calculer $Lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(s_n, t_n)$