UPJV UFR des SCIENCES

Licence STS 3ème Année
Informatique
Aide à la Détection d'Erreurs

FEUILLE DE TD n°1

LOGIQUE

1) Donner la table de vérité de $p \longrightarrow q$ (que l'on peut noter aussi $p \Longrightarrow q$). Énoncer la négation de $p \longrightarrow q$. Donner 2 équivalents tautologiques de $p \longrightarrow q$.

2) Montrer (lois de de Morgan) :
a) $\big(\neg(p \wedge q)\big) \equiv \big((\neg p) \vee (\neg q)\big)$
b) $\big(\neg(p \vee q)\big) \equiv \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$

3) Montrer : $\big(p \wedge (p \longrightarrow q)\big) \vDash q$.

4) Règle de substitution : « substituer la même formule à toutes les occurrences de la même lettre dans une tautologie donne une tautologie ».

En utilisant cette règle, démontrer la tautologie suivante :

$$\big((p \longrightarrow q) \wedge q\big) \equiv \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$

Règle de remplacement : « Soit F une formule et A une sous-formule de F. Si $A \equiv B$, alors le remplacement de A par B dans F donne une formule F' tautologiquement équivalente à F ».

En utilisant cette règle, démontrer que les 2 formules suivantes sont tautologiquement équivalentes, en déduire que la seconde formule est une tautologie :

$$\big((p \longrightarrow q) \wedge q\big) \leftrightarrow \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$
$$((\neg(p \wedge (\neg q))) \wedge q) \leftrightarrow \big(q \wedge (p \longrightarrow q)\big)$$

5) Soit S la suite infinie de nombres $s_0, s_1, s_2, \ldots\ s_i \ldots$ où les indices des éléments de la suite sont les entiers naturels. Caractériser le fait que les éléments de la suite S sont en ordre croissant en utilisant une formule de la logique des prédicats. Si possible, donner deux caractérisations.
Faire de même avec T la suite finie de $n+1$ nombres $t_0, t_1, t_2, \ldots\ t_i \ldots t_n$.

RÉCURRENCE

6) On démontre ci-dessous la propriété suivante : pour tout ensemble d'individus, les individus de cet ensemble ont le même âge.
On commence par formaliser la propriété : soit le prédicat $ma(x,y)$ qui signifie "x a le même âge que y", alors la propriété à démontrer (que l'on notera MA) peut s'énoncer de façon formelle suivante, où E est un ensemble d'individus :

$$\forall E, \forall x, \forall y, \big((x,y) \in E^2\big) \rightarrow ma(x,y).$$

Il faut donc faire apparaître un entier qui servira de base à notre récurrence, cet entier est tout simplement le cardinal de E. MA peut donc s'écrire comme $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P(n)$ où $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}}$ est le $\bigwedge$ généralisé et $P(n)$ est la propriété suivante :

$$\forall E, (|E| = n) \rightarrow \Big(\forall x, \forall y, \big((x,y) \in E^2\big) \rightarrow ma(x,y)\Big)$$

Pour démontrer que MA est vraie, il suffit de démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n
Démonstration de la vérité de $P(n)$:

- Initialisation :
  - $n = 0$: dans ce cas $E = \emptyset$, et le prédicat $(x,y) \in E^2$ est faux, donc l'implication $\left((x,y) \in E^2\right) \rightarrow ma(x,y)$ est toujours vraie. $P(0)$ est donc vraie.
  - $n = 1$: dans ce cas E ne contient qu'un élément. Donc $\left((x,y) \in E^2\right) \vDash (x = y)$ et $(x = y) \vDash ma(x,y)$, ce qui nous permet de déduire que l'implication $\left((x,y) \in E^2\right) \rightarrow ma(x,y)$ est toujours vraie. $P(1)$ est donc vraie.
- Hérédité : a-t-on $P(n) \ \vDash \ P(n+1)$?
  Soit E un ensemble quelconque d'individus de cardinal $n+1$. $E = \{a, b, c, \dots\}$.
  Posons $E_a = E \setminus \{a\}$ et $E_b = E \setminus \{b\}\}$, E_a et E_b ont chacun un cardinal égal à n. On peut donc appliquer l'hypothèse d'hérédité et ainsi tous les individus de E_a ont le même âge, de même pour ceux de E_b. En particulier $ma(b,c)$ est vrai dans E_a et $ma(a,c)$ est vrai dans E_b. De $ma(b,c)$ et $ma(a,c)$ on peut conclure, par transitivité, que $ma(a,b)$ est vrai dans E. Puisque pour tout autre couple (x,y) de E^2 $ma(x,y)$ est vrai (puisque ces couples sont dans E_a ou E_b), $P(n+1)$ est vérifié. L'hérédité est donc vérifiée.
- Conclusion : La propriété $P(n)$ étant vraie pour les premiers rangs et l'hérédité étant vérifiée, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question : ce résultat étant faux en général (sinon cela signifierait en particulier que vous avez le même âge que moi… no comment !), expliquer précisément quelle est l'« escroquerie » contenue dans cette démonstration.

Attention : Dans tout ce qui suit, vous soignerez particulièrement la rédaction en présentant la propriété recherchée P(n), l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

7) Démontrer par récurrence les deux affirmations suivantes :
   a. Pour tout entier naturel n
      $2(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n) = n(n+1)$
   b. Pour tout réel a ($a \neq 0$ et $a \neq 1$) et tout entier naturel n
      $a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

8) Soit S la suite infinie de nombres $s_0, s_1, s_2, \dots\ s_i \dots$ définie par :
   $$s_0 = 0 \text{ et pour tout } i > 0, s_i = 2s_{i-1} + 1$$
   Donner la formule close (formule ne faisant pas intervenir d'éléments de la suite) de s_i.

9) On considère la suite (u_n) définie par :
   $$u_0 = 1,\ u_1 = 3 \text{ et pour tout } n \geq 2,\ u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$$
   Donnez la formule close pour tout élément de la suite.

10) On considère la suite (u_n) à termes positifs ou nuls définie par :
    $$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 5}$$
    Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

11) Soit U la suite définie par :
    $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_n = u_{n \text{ div } 2} + 1$
    Prouvez que pour tout $n \geq 1, u_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière par défaut de X.

12) Montrer que les deux caractérisations données pour S à la question 5 sont tautologiquement équivalentes.