Logique des prédicats

Rappels

Ressources

- Ressources Vidéos :
  - https://www.youtube.com/watch?v=91nF7dzllzg
  - https://www.youtube.com/watch?v=AFLRh_rO1t4
  - https://www.youtube.com/watch?v=sKjaDhYz8dg
- Ressource Texte :
  - https://www.lri.fr/~paulin/Agreg/predicat.pdf

Les prédicats

- On a un ensemble d’objets ayant une valeur constante :
  - Des entiers : 18, 25, -51
  - Des rationnels : 2/3, 5/4, 22/7
  - Des réels : log(53), e^{-3}, π
  - Logique booléenne : Vrai, Faux
  - Personnages : César, Cléopâtre, Bill Gates
  - Des couples (César, -100); (Cléopâtre, -69)…
- Une variable est une notation symbolique qui peut prendre n’importe quelle valeur (une seule à la fois) parmi les objets.
  - Les variables peuvent être restreintes à un domaine de définition

Les prédicats

- Une **proposition** est une variable booléenne c'est-à-dire une variable qui ne peut prendre que deux valeurs : Vrai ou Faux
- Un **prédicat** est une fonction booléenne ayant une ou plusieurs variables comme argument. Le nombre d'argument s'appelle **l'arité**.

Les formules de la logique du premier ordre

- Les propositions, les prédicats sont des formules de la logique des prédicats
- Si F1 et F2 sont deux formules de la logique des prédicats alors : (F1), non(F1), (F1 et F2), (F1 ou F2), (F1 xou F2), (F1 => F2), (F1 <=> F2) sont des formules de la logique des prédicats.
- Si F1 est une formule de la logique des prédicats et x une variable alors ∃x F1, ∀x F1 sont des formules de la logique des prédicats.
- Toute formule de la logique des prédicats peut être construite en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Table de vérité du et

et			
	F1 \ F2	Vrai	Faux
	Vrai	Vrai	Faux
	Faux	Faux	Faux

Table de vérité du ou

ou			
	F1 \ F2	Vrai	Faux
	Vrai	Vrai	Vrai
	Faux	Vrai	Faux

Table de vérité du xou

xou			
	F1 \ F2	Vrai	Faux
	Vrai	Faux	Vrai
	Faux	Vrai	Faux

Table de vérité du =>

=>			
	F1 \ F2	Vrai	Faux
	Vrai	Vrai	Faux
	Faux	Vrai	Vrai

Table de vérité du <=>

<=>			
	F1 \ F2	Vrai	Faux
	Vrai	Vrai	Faux
	Faux	Faux	Vrai

Table de vérité du non

F	Non F
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Principe du tiers exclu

- En logique toute proposition est soit Vrai soit Fausse

Le concept de preuve

- Une preuve est un argumentaire irréfutable qui lie par un mécanisme de cause à effet un ensemble d’hypothèses (ou d’axiome) à une conclusion.

Exemple : Le syllogisme

- Définition : En logique, le syllogisme est un raisonnement logique mettant en relation au moins trois propositions : deux ou plus d'entre elles, appelées « prémisses », conduisent à une « conclusion ». Aristote a été le premier à le formaliser dans son Organon.

- Exemple 1
  - Tous les hommes sont mortels
  - Or tout les rois sont des hommes
  - Donc tous les rois sont mortel

Exemple : Le syllogisme

- Exemple 2
  - Tous les hommes sont mortels
  - Or l’empire est immortel
  - Donc l’empire n’est pas un homme

Le raisonnement par récurrence

- On souhaite prouver pour un prédicat à une variable *P(x)* que pour tout entier naturel, le prédicat est vrai.
- Le raisonnement par récurrence est une méthode de démonstration.

- **Remarque :** on ne peut pas établir un résultat par un raisonnement par récurrence on peut juste vérifier que le résultat dont on a une intuition est correct.

Le raisonnement par récurrence : exemple

- Soit $P(n)$: « $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1/6\ (n\ (n+1)\ (2n+1))$ »
- On souhaite prouver que pour tout entier naturel *n* le prédicat à une variable $P(n)$ est vrai.

- Dans un premier temps nous devons établir que $P(0)$ est vrai :
  - $P(0)$: « $0^2 = 1/6 * (0 * (0+1) * (2*0+1))$ » (On remplace n par 0)
  - Or $0^2 = 0$ et $1/6 * (0 * (0+1) * (2*0+1)) = 0$
  - Puisque 0 = 0 on a démontré que $P(0)$ est vrai.
- C’est la première partie du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence : exemple

- Dans un second temps nous devons établir que s'il existe un entier naturel *i* tel que (P(0) et P(1) et… et P(*i*)) est vrai alors P(*i*+1) est vrai *i.e.* (P(0) et P(1) et… et P(*i*)) prouvent P(*i*+1).
  - P(*i*+1) : « $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = 1/6 * ((i+1) * (i+1+1) * (2*(i+1)+1))$ » (On remplace *n* par *i*+1) On doit vérifier cette égalité
  - Or $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2) + (i+1)^2$
  - Puisque P(*i*) est vrai on a : $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2 = 1/6\ (i\ (i+1)\ (2i+1))$
  - Donc $(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2) + (i+1)^2 = (1/6\ (i\ (i+1)\ (2i+1))) + (i+1)^2$
  - $=(i+1)(1/6\ (i\ (2i+1))+i+1) = 1/6\ (i+1)\ (2\mathrm{i}^2 + i + 6i + 6) = 1/6\ (i+1)\ (2i^2 + 7i + 6)$
  - Or $(i+1+1) * (2*(i+1)+1)) = (i+2)\ (2i+3) = 2i^2 + 7i + 6$
  - Donc $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + i^2 + (i+1)^2 = 1/6 * ((i+1) * (i+1+1) * (2*(i+1)+1))$ et puisque l'égalité est vérifiée, P(*i*+1) est établi