

Conception d'algorithmes en langage de programmation C++

Objectif : Modélisation du transfert thermique par conductance et par conduction

1 Cas d'une sphère

Il s'agit dans le cadre de ce travail d'implémenter dans le programme PFD (en langage de programme C++), conçu précédemment pour modéliser la chute libre d'une sphère, un modèle de conductance thermique permettant de décrire le flux thermique transmis à la sphère, une fois que celle-ci soit en contact permanent avec une paroi horizontale chauffée (ou refroidie) à une température donnée. On rappelle que le mouvement de la sphère est freiné par une paroi horizontale placée à $h = 0 \text{ m}$. Initialement, la sphère est à la température ambiante de 25°C , tandis que la paroi est maintenue à une température constante, $T_{imp} = 100^\circ\text{C}$ (le cas inverse peut aussi être simulé). Une fois le contact sphère/paroi est établi, le transfert thermique se fait par conductance, c-a-d, le flux de chaleur se transmet de la paroi à la sphère à travers l'aire de contact. Ce flux est d'autant plus important que la surface de contact sphère/paroi est élevée. Les figures 1(a-b) illustrent qualitativement et quantitativement le transfert thermique par conductance au niveau de l'aire de contact sphère/plan : (a) température de la sphère à l'instant t et (b) évolution de la température de la sphère lors du chauffage et du refroidissement.

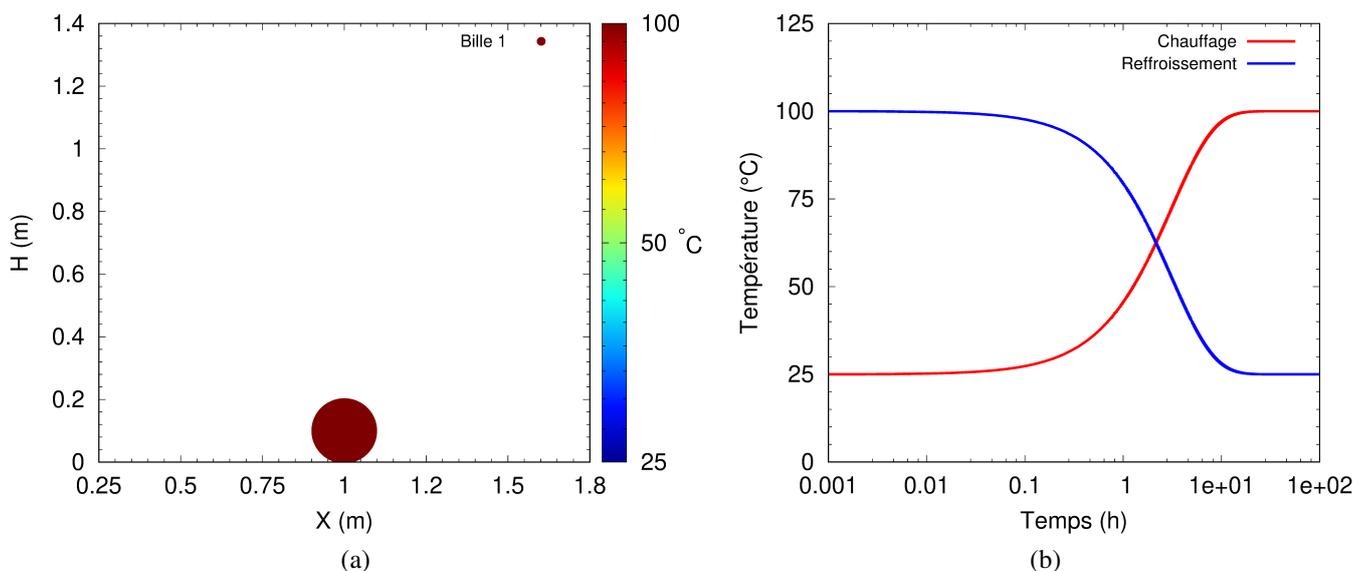


Figure 1: Transfert thermique par conductance sphère/plan

À noter que le temps nécessaire à la sphère pour atteindre le régime stationnaire (lors de la phase de chauffage ou de refroidissement) ne traduit pas exactement la totalité des transferts thermiques de la paroi

vers la sphère. À l'évidence d'autres contributions doivent être prises en compte, notamment celles dues à l'air chaud situé au voisinage du contact sphère/paroi. Cette effet sera modélisé dans un deuxième temps.

Ci-dessous sont rappelés l'équation de transfert thermique (loi de Fourier), le schéma d'intégration explicite pour calculer la température T au pas de temps $t + \Delta t$ et l'expression de l'effort de contact sphère/paroi F_n :

1. Loi de Fourier : $mC_p \frac{dT}{dt} = Q_{ext} + \sum_{i=1}^N Q_i$; avec C_p la capacité thermique massique du matériau ($J.kg^{-1}.K^{-1}$), Q_{ext} le flux imposé (W), Q_i le flux transmis par contact (W), N le nombre de contacts (dans le cas présent $N = 1$).
2. Schéma d'intégration explicite : $T_{t+\Delta t} = T_t + \frac{\Delta t}{C_p \rho V} \left(Q_{ext} + \sum_{i=1}^N \underbrace{H_c (T_t^i - T_t)}_{Q_i} \right)$; avec ρ la masse volumique de la sphère ($kg.m^{-3}$), V son volume (m^3) et C_p sa capacité thermique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$). H_c est la conductance de contact ($W.K^{-1}$) donnée par l'expression : $H_c = 4 r_{Hertz} / \left(\frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_w} \right)$ avec r_{Hertz} rayon de l'aire de contact de Hertz ($r_{Hertz} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi (k_b + k_p) R_b F_n}$), λ_s , λ_w les conductivités thermiques respectivement de la sphère et de la paroi ($W.m^{-1}.K^{-1}$).
3. À l'équilibre, l'effort normal F_n au contact sphère/paroi est donné par : $F_n = -k_n \delta_n - c_n v_n$ (N) avec $k_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R_b \delta_n}$ (avec $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p}$) et $c_n = 2\sqrt{\frac{5}{3}} \psi \sqrt{\frac{3}{2} k_n m}$ (avec $\psi = \ln \alpha_e / \sqrt{\ln^2 \alpha_e + \pi^2}$).

Paramètres matériau : $R_b = 0,05 m$, $g = 9,81 m.s^{-2}$, $\rho = 2700 kg.m^{-3}$, $E_s = E_p = 70 GPa$, $\nu_s = \nu_p = 0.3$, $C_p = 897 J.kg^{-1}.K^{-1}$, $\lambda = 237 W.m^{-1}.K^{-1}$, $\Delta t = 5.10^{-4} s$.

La contribution de l'air chaud, situé au voisinage du contact sphère/paroi dans le bilan thermique, est prise en compte à l'aide du modèle de L. Lu & al. (*International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017). Les paramètres du modèle sont représentés à la figure 2.

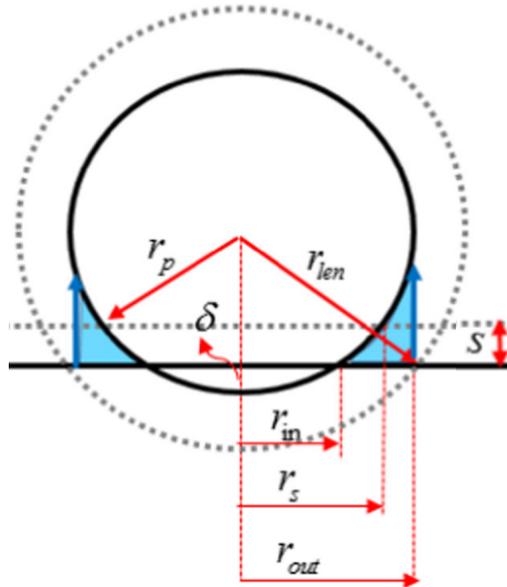


Figure 2: Paramètres du modèle de conduction thermique sphère/air (L. Lu & al. 2017)

Le flux de chaleur échangé entre l'air et la sphère est donné par l'expression analytique suivante : $Q_{bfp} = H_f (T_p - T_b^t)$, avec $H_f = 2\pi \lambda_g \times \overline{Q}_{pfb} \times R_b$. où λ_g est la conductivité thermique de l'air, $\overline{Q}_{pfb} = \frac{\bar{r}_s^2 - \bar{r}_{in}^2}{2\bar{s}} + \sqrt{1 - \bar{r}_{out}^2} - \sqrt{1 - \bar{r}_s^2} + (1 - \bar{\delta}_n) \ln \left(\frac{1 - \bar{\delta}_n - \sqrt{1 - \bar{r}_{out}^2}}{1 - \bar{\delta}_n - \sqrt{1 - \bar{r}_s^2}} \right)$; $\bar{\delta}_n = \frac{\delta_n}{R_b}$; δ_n : interpénétration

normale sphère/paroi ; $\bar{r}_{out} = \sqrt{\bar{r}_{len}^2 - (1 - \bar{\delta}_n)^2}$; $\bar{r}_{in} = \sqrt{1 - (1 - \bar{\delta}_n)^2}$; $\bar{r}_s = \sqrt{1 - (1 - \bar{\delta}_n - \bar{s})^2}$.

Le flux de chaleur Q_{bfp} s'ajoute donc au bilan thermique global ($Q_{bfp} + Q_{bp}$: conductance par l'aire de Hertz + conduction par effet de l'air). La figure 3 montre l'évolution de la température en fonction du temps avec et sans conduction thermique avec l'air. La courbe verte en trait discontinu traduit la contribution de l'air dans le processus de chauffage de la sphère.

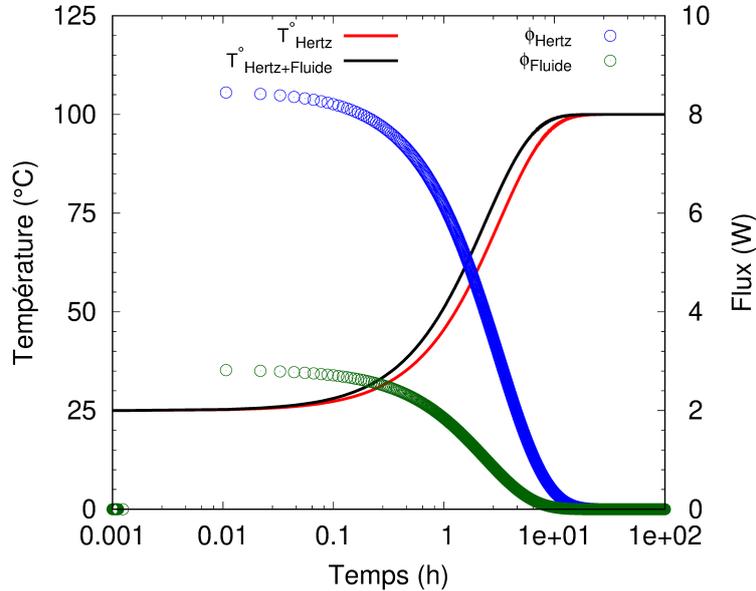


Figure 3: Évolution de la température et du flux en fonction du temps ($\bar{r} = 1.09$ $\bar{s} = 0.002$)

2 Cas de plusieurs sphères (sans contact entre sphères)

Après avoir simulé le transfert thermique dans une sphère en contact avec une paroi chauffante, il s'agit maintenant de modéliser les échanges thermiques par conductance (sphère/paroi) et par conduction (sphère/aire) de plusieurs sphères (tableau. 2) en contact avec la même paroi chauffante. Il convient de préciser que les sphères n'entrent pas en contact les unes avec les autres tout au long de la simulation. Le chargement thermique imposé aux sphères est celui considéré précédemment (cas d'une sphère).

Sphère	1	2	3	4
R_b (m)	0.05	0.07	0.10	0.15

Les figures 4 (a) et 4 (b) montrent respectivement les sphères en équilibre (état statique) après résolution du principe fondamental de la dynamique (PFD) et l'état thermique à l'équilibre (régime stationnaire) après la phase de chauffe. Rappelons que la modélisation thermique est basée sur une résolution discrétisée en temps de la loi de Fourier explicitée précédemment.

Les figures 5 (a) et 5 (b) représentent respectivement l'évolution de la température dans chaque sphère et celle du flux thermique transmis par la paroi à chaque sphère. Comme attendu, on obtient une durée de chauffe proportionnelle au rayon de la sphère. Plus la sphère est de grande taille plus l'équilibre thermique est long à atteindre et plus le flux thermique transmis à la sphère est important.

Une analyse plus fine des résultats en terme de flux permet de mettre en évidence l'influence de la masse de la particule sur la quantité de flux qui lui est transmise par la paroi chauffante. La courbe 6 (a) permet de vérifier une évolution en loi de puissance du flux total absorbé par une sphère en fonction de sa masse. La courbe 6 (b) permet quant à elle de vérifier la prépondérance du flux transmis par conductance (flux

passant par l'aire de Hertz) à une sphère sur celui transmis par le fluide situé au voisinage de celle-ci (flux par conduction entre l'air chaud à proximité de la paroi chauffante et la sphère). On remarque néanmoins que le flux thermique transmis par l'air est sensible à la taille de la sphère. En effet, la contribution de l'air chaud dans le transfert thermique est inversement proportionnelle à la taille de la sphère.

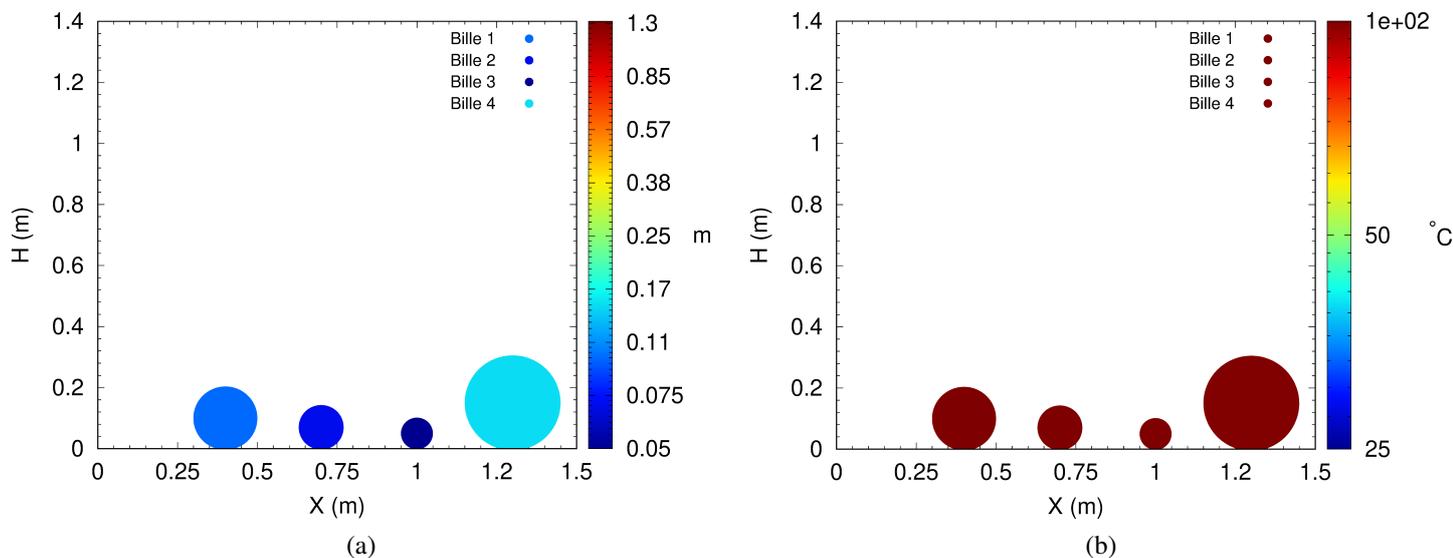


Figure 4: Configuration à l'équilibre des 4 sphères : (a) mécanique - (b) thermique

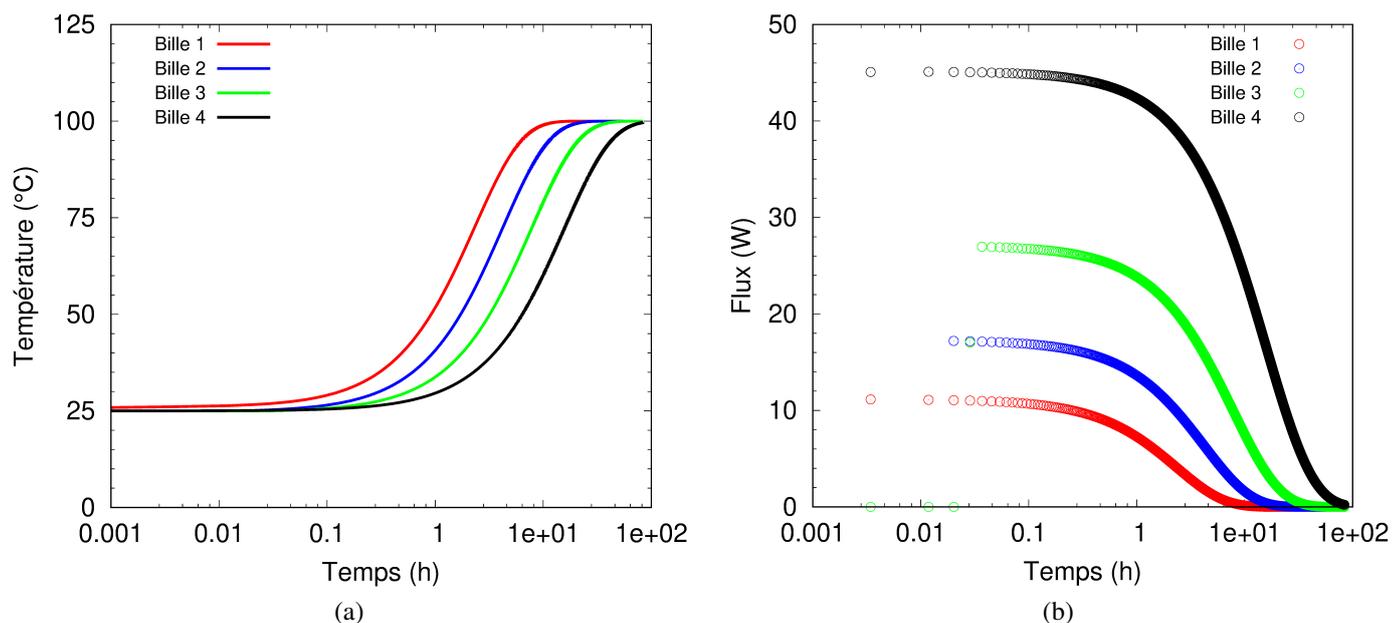


Figure 5: (a) Évolution de la température - (b) Évolution du flux thermique

3 Travail demandé

En utilisant le programme source en langage c++ disponible sur Moodle, faire l'implémentation de la loi de Fourier discrétisée afin de modéliser le transfert thermique dans les sphères. Le script Gnuplot disponible également sur la plateforme Moodle permet de post-traiter les résultats fournis par le programme source.

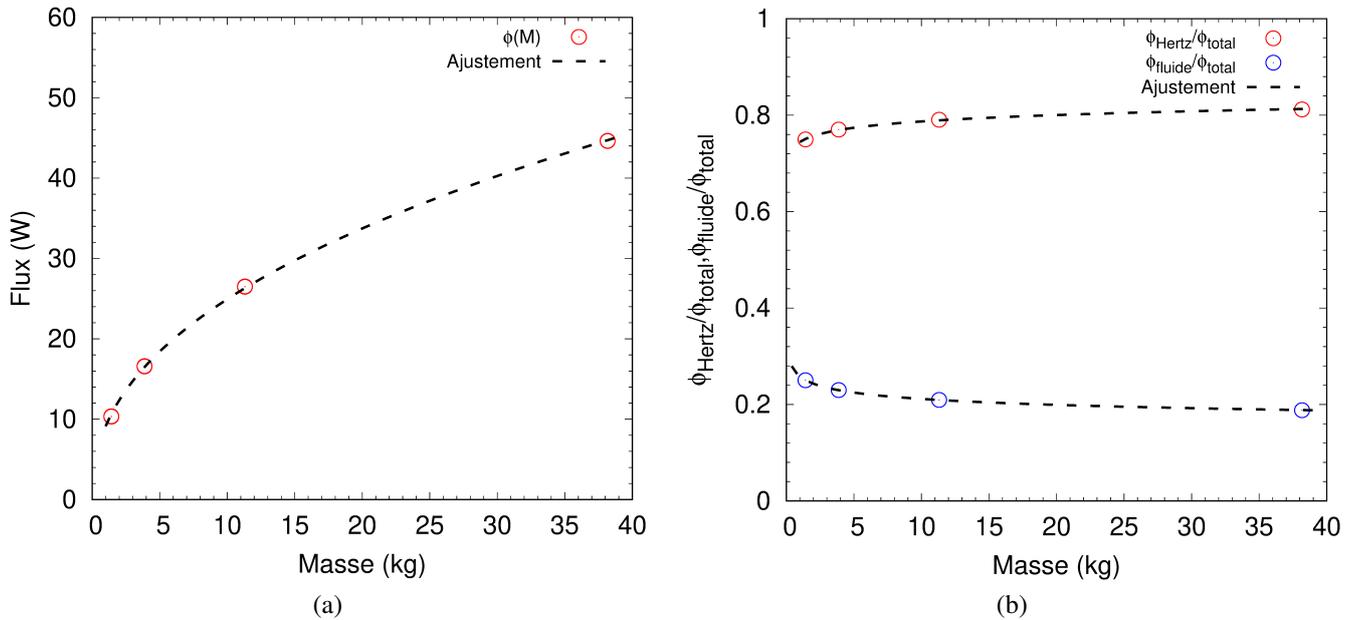


Figure 6: (a) Dépendance du flux à la masse - (b) Variation des flux transmis par l'aire de Hertz et le fluide environnant

4 Cas d'une chaîne de sphères (avec contact entre sphères)

En vous appuyant sur l'algorithme précédent (programme C++ conduction thermique dans une particule sphérique (ou plus) en contact avec une paroi chauffante), modélisez cette fois-ci le transfert thermique dans une chaîne constituée de 10 sphères de même taille et disposées verticalement. Initialement, les sphères sont à la température ambiante de $25^{\circ}C$, tandis que la paroi chauffante est maintenue à une température constante, $T_{imp} = 100^{\circ}C$. Les sphères sont placées à des hauteurs différentes sans vitesse initiale, seule la force gravitationnelle agit sur celles-ci.

Contrairement aux cas étudiés jusque-là, où le contact entre sphères n'était pas pris en compte, il s'agit maintenant de modéliser les interactions de contact sphère/sphère *via* le modèle de contact de type hertzien (Fig. 7). Les expressions de la raideur de contact, du coefficient d'amortissement et de la force de contact normale sont identiques à celles utilisées pour le contact sphère/plan. À noter que le rayon de la sphère R_b utilisé dans ces expressions est remplacé par le rayon effectif R_{eff} des deux sphères en contact i et j de rayons respectifs R_i et R_j , avec $R_{eff} = \frac{R_i \times R_j}{R_i + R_j}$.

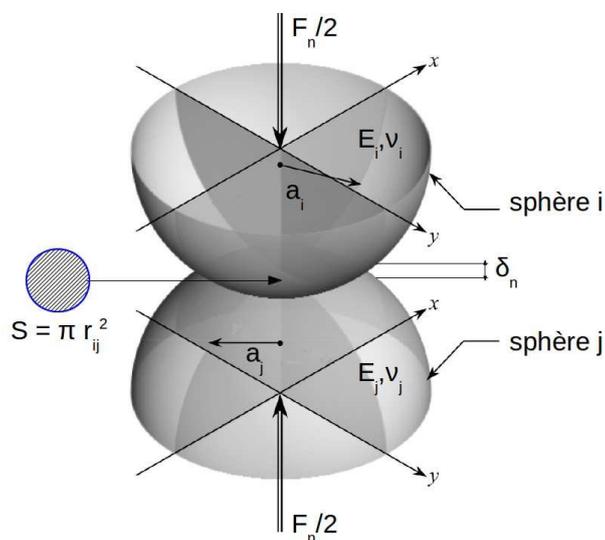


Figure 7: Contact hertzien entre 2 sphères

Concernant le transfert thermique entre sphères (transfert de flux thermique), celui-ci se fait également *via* l'aire de contact de Hertz en implémentant la conductance de contact dans la loi de Fourier citée précédemment. Une fois l'équilibre mécanique est atteint, la sphère du bas, celle en contact avec la paroi chauffante (sphère bleue de la figure 8(a)), participe au transfert thermique par le biais de l'aire de contact. Le même phénomène se reproduit à l'interface de contact pour les autres sphères de la chaîne. La figure 8(b) montre une décroissance linéaire du ratio $F_{cont_h}/M_b.g$. En effet, une fois l'équilibre est atteint, au point de contact sphère /paroi la réaction de contact F_{cont_h} est $10\times$ le poids d'une sphère ($M_b \times g$). Le même raisonnement peut être fait pour les autres points de contact de la chaîne.

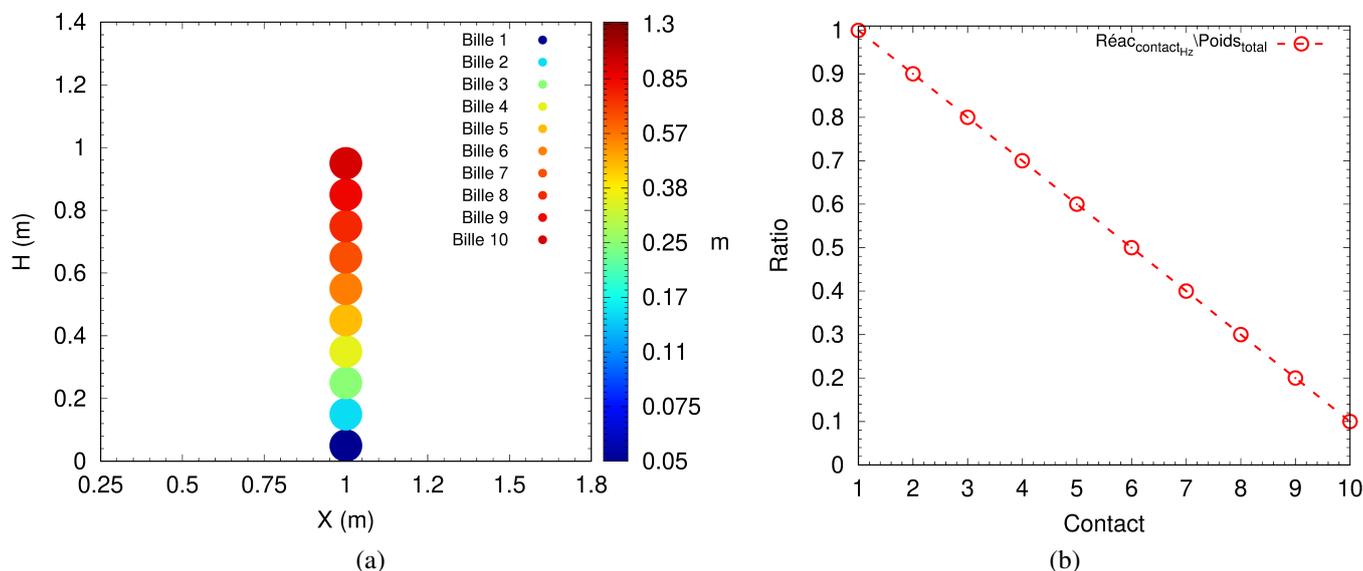


Figure 8: (a) Position verticale des billes à l'équilibre - (b) Rapport force de contact/poids d'une bille au niveau des contacts

Les figures 9 (a) et 9 (b) montrent respectivement l'état thermique à un instant donné dans la chaîne de sphères et l'évolution de la température au cours du temps dans les sphères 1, 3 et 5.

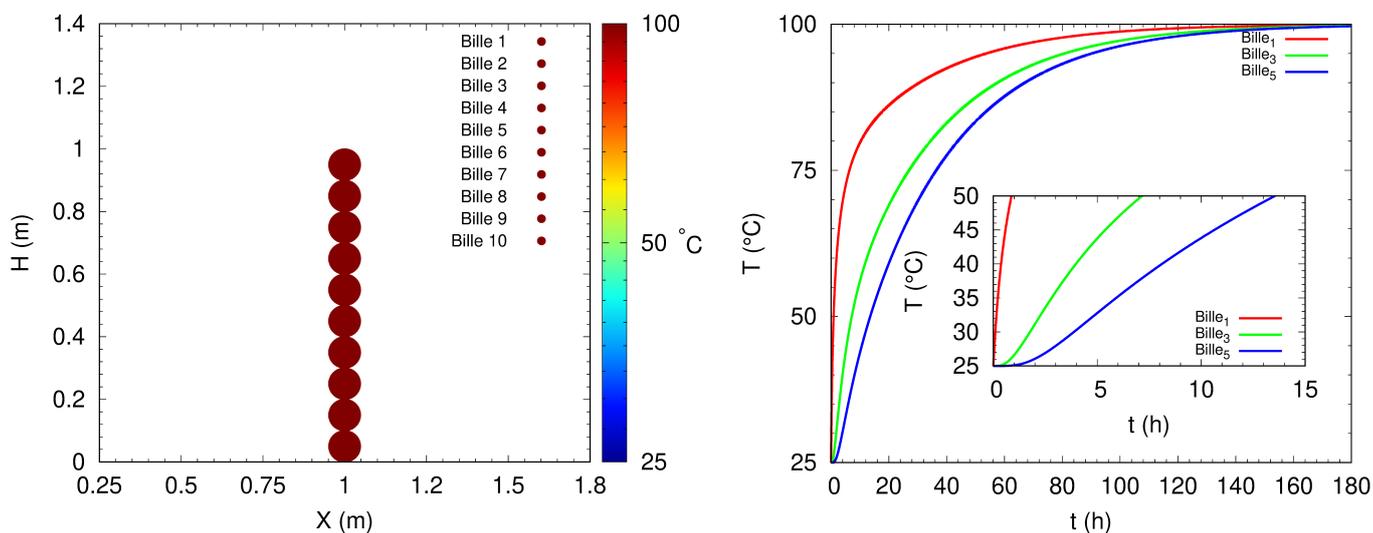


Figure 9: (a) Équilibre thermique dans la chaîne de sphères - (b) État thermique stationnaire dans les sphères 1,3 & 5