

ANNALES 2018-2019
SEMESTRE 3 ET 4 PHYSIQUE
SESSION 2

SEMESTRE 3 :

- MECANIQUE EN REFERENTIEL GALILEEN
- OUTILS MATHEMATIQUES
- ELECTROSTATIQUE
- METHODES NUMERIQUES
- ELECTRONIQUE ANALOGIQUE
- CAPTEURS ET INSTRUMENTATION

SEMESTRE 4 :

- ELECTROMAGNETISME
- ELECTRONIQUE ANALOGIQUE 2
- OUTILS MATHEMATIQUES

Licence 2^{ème} année – S3

UE Mécanique en référentiel Galiléen

17/06/2019

2^{nde} session – 2h

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Dans la notation, il sera fortement tenu compte de la rédaction et des explications données dans les réponses qui seront apportées.

Répondre aux deux parties sur des copies séparées

Partie 1 Cinématique : (10pts)

On considère une roue de rayon R , de centre O' , roulant sans glisser sur le sol avec une vitesse angulaire ω . On s'intéresse à la trajectoire d'un point A , situé à la périphérie de la roue et dont la position en $t=0$ se trouve à l'origine du repère (O,x,y) lié au sol.

1. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$, les coordonnées de A en fonction du temps. Tracer sa trajectoire.
2. Calculer le vecteur vitesse et étudier les variations de son module au cours du temps.
3. Déterminer le vecteur accélération au cours du temps et le représenter sur une figure.
4. Mêmes questions pour la trajectoire vue par un observateur positionné au centre de la roue, sans tourner avec celle-ci.

Partie 2 Dynamique : (10 pts)

Dans un repère galiléen, deux particules de masses m_1 et m_2 ne sont soumises qu'à leur interaction mutuelle. Leurs vitesses respectives sont \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{w}$ représente la vitesse relative de la masse m_2 par rapport à la masse m_1 .

1. Montrer que les vitesses \vec{u}_1 et \vec{u}_2 des deux particules dans le référentiel du centre de masse sont proportionnelles à \vec{w} .
2. En déduire une expression de leurs quantités de mouvement et de l'énergie cinétique totale dans le référentiel du centre de masse en fonction de la vitesse relative et de la masse réduite.
3. En déduire également la forme que prendra l'équation de Newton dans le référentiel du centre de masse.
4. Calculer dans le cas d'une collision totalement inélastique entre les deux particules, la perte d'énergie cinétique associée à ce choc.

Université de Picardie Jules Verne. Année 2018-2019.
L2-S3 session 2.

Examen "Outils Mathématiques"

Les calculatrices sont interdites.

Barème indicatif: **Ex.1:** 6pts; **Ex.2:** 9pts; **Ex.3:** 4pts, **Ex.4:** 4pts.

Exercice 1: Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$, on considère une ellipse E de demi-grand axe a et de demi-petit axe b centrée sur l'origine O . Le grand axe de l'ellipse est supposé porté par $(x'Ox)$. Faire une figure.

- 1) Calculer l'aire A de l'ellipse directement en fixant x .
- 2) Calculer l'aire A de l'ellipse en faisant un changement de variables.

Exercice 2: Soit $I = \int \int \int_D xyz \, dx dy dz$ avec $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

- 1) Calculer I en utilisant la méthode par tranches.
- 2) Calculer I en utilisant la méthode par pilcs.
- 3) Calculer I en utilisant un changement de variables.

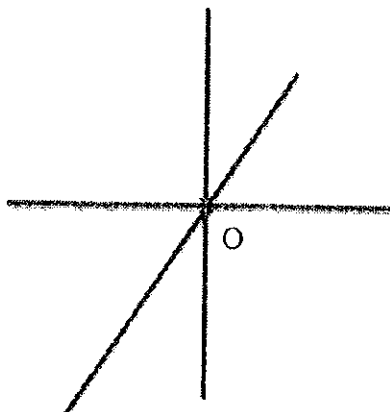
Exercice 3: On considère $K = \int \int \int_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ où D désigne le domaine de l'espace limité par le cône d'équation: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les plans d'équations: $z = 0$ et $z = 1$.

- 1) Calculer K en passant en coordonnées cylindriques.
- 2) Calculer K en passant en coordonnées sphériques.

Exercice 4: Calculer l'aire A de la région R délimitée par la cardioïde $r = 2 + 2 \cos \theta$ et à l'extérieur du cercle $r = 3$. On commencera par faire une figure.

Licence
Examen d'électrostatique
Session 2, juin 2019

Ex I :



Une sphère de rayon R , chargée uniformément en volume avec une densité de charge uniforme γ , est centrée sur un point O .

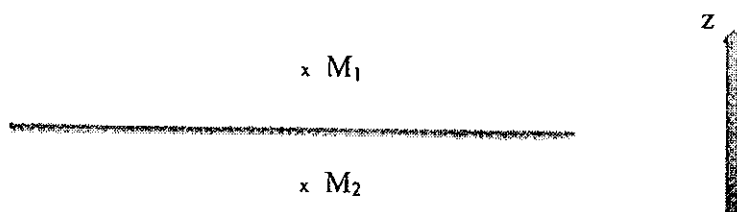
1) Quels sont les plans de symétrie du système ? En déduire (expliquer) la valeur du champ électrique, au point O , produit par la sphère chargée.

2) Retrouver la valeur de ce champ électrique au point O en intégrant $\frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overline{M'O}}{M'O^3}$ sur le volume de la sphère, où M' est un point de la sphère.

On rappelle que $\mathbf{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}$ et que le volume élémentaire, en coordonnées sphériques, $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Ex II :

On considère une plaque de surface \mathcal{A} , de charge Q et de densité surfacique $\sigma > 0$ (on considérera d'abord la plaque comme étant infinie et infiniment fine).



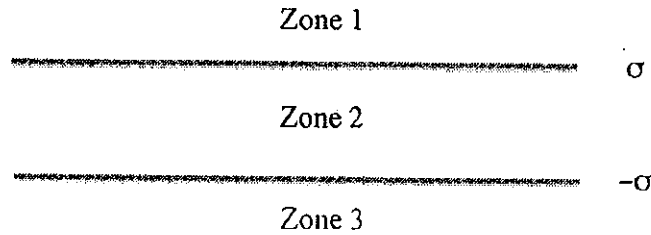
1) M_1 et M_2 étant symétrique par rapport à la plaque, quelle est la relation entre le champ électrique $\mathbf{E}(M_1)$ et $\mathbf{E}(M_2)$? Pourquoi ?

2) Calculer σ en fonction de Q et \mathcal{A} .

3) En appliquant le théorème de Gauss, calculer $E(z)$ de part et d'autre de la plaque en fonction de Q . (En considérant la symétrie du système, il faudra d'abord déterminer l'orientation de E ainsi que les variables dont il dépend, puis, appliquer le théorème après s'être donné une surface de Gauss de section S passant par M_1 et M_2)

3) On considère un autre plaque (avec une charge opposée). Calculer $E(z)$ de part et d'autre de la plaque en fonction de Q .

4) On place cette seconde plaque parallèlement et à une distance d de la première.



Puisque le champ électrique est une grandeur additive, quelle sera l'expression du champ $E(z)$ dans les 3 zones de l'espace ?

5) Nous avons, en fait, formé un condensateur. Calculer l'énergie électrostatique qui règne entre les 2 armatures.

6) En déduire la capacité de ce condensateur.

Méthodes numériques L2, second session

1)

On lance trois dés et on note la somme des numéros obtenus. On effectue N lancers et on calcule les fréquences des sommes 3, 4, 5,18.

a) Écrire le programme permettant d'effectuer la simulation de N ($N=1000$, $N=10000$, $N=100000$) lancers et de calculer les fréquences des sommes 3, 4, 5,18.

b) Représenter graphiquement les résultats.

2) La suite de Cyracuse

On appelle suite de Cyracuse une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante :

On part d'un nombre entier plus grand que zéro :

- si il est pair, on le divise par 2

- si il est impaire, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun des entiers ne dépend que de son prédécesseur.

Par exemple, a partir de 14, on construit la suite d'entiers naturels : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1,

Calculer les 30 premières valeurs de la suite de Cyracuse pour $N = 50$ et $N = 36$.

3) Écrire le programme permettant de calculer numériquement une intégrale $I = \int_1^5 x \cdot \ln(x) dx$. On utilise la méthode des trapèzes.

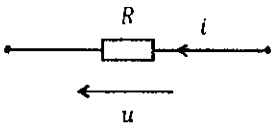
Aucun document n'est autorisé. L'usage du smartphone est prohibé. Calculatrice autorisée.

L'énoncé doit être glissé dans la copie.

Il y a 14 questions à réponse unique pour lesquelles il faut placer une croix à la place correcte et 4 exercices à traiter sur la copie. En plus de la justesse, la qualité formelle de la rédaction est évaluée.

1. Cours et applications simples (7 pts)

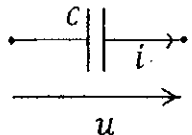
1



On a $R = 1.2 \Omega$ et $i = 50 \text{ mA}$.
 Alors :

$u = -120 \text{ mV}$	$u = -60 \text{ mV}$	$u = 0 \text{ mV}$	$u = 60 \text{ mV}$	$u = 120 \text{ mV}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-----------------------	----------------------	--------------------	---------------------	----------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

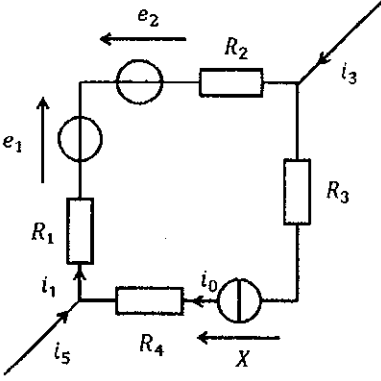
2



On a $u = 2t$, $C = 1.2 \text{ nF}$, alors :

$i = 2.4 \text{ mA}$	$i = -2.4 \text{ mA}$	$i = 2.4 \text{ nA}$	$i = 0.6 \text{ nA}$	$i = -0.6 \text{ nA}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----------------------	-----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

3



On a :

$i_1 = i_3 = 1 \text{ mA}$;
 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ et
 $e_1 = 1 \text{ V}$, $e_2 = 2 \text{ V}$.

Alors :

$X = -2 \text{ V}$	$X = -1 \text{ V}$	$X = 0 \text{ V}$	$X = 1 \text{ V}$	$X = 2 \text{ V}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------	--------------------	-------------------	-------------------	-------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

4

On a un filtre de gain en tension $G = 10$. Le gain en décibel est $G_{dB} =$

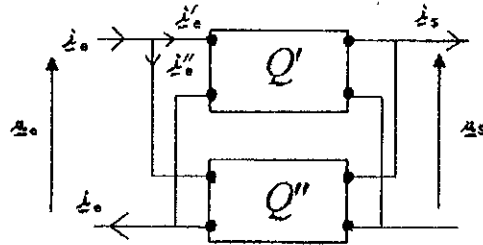
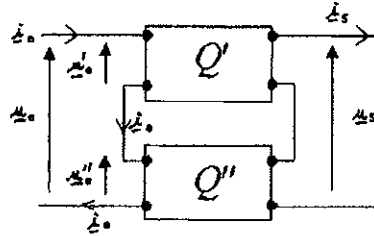
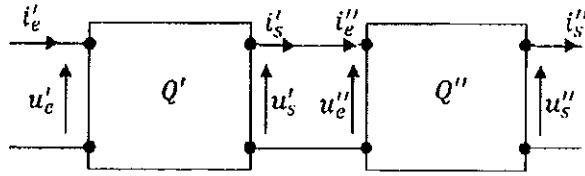
-20 dB	-10 dB	0 dB	10 dB	20 dB	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
------------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

5

On définit la bande passante à 3 dB, par l'ensemble des pulsations $\{\omega\}$ pour lesquelles :

$G_{dB}(\omega) \leq G_{dB}^{max} - 3$	$G_{dB}(\omega) \geq \sqrt{2} G_{dB}^{max}$	$G_{dB}(\omega) \geq 0.3 G_{dB}^{max}$	$G_{dB}(\omega) \geq G_{dB}^{max} - 3$	$G_{dB}(\omega) \geq \frac{G_{dB}^{max}}{\sqrt{2}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--	---	--	--	---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

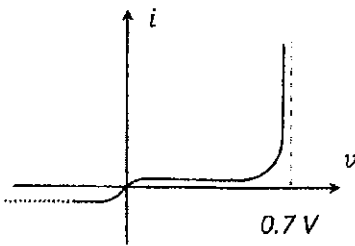
6



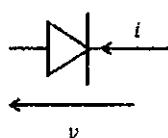
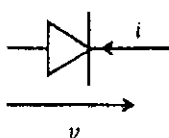
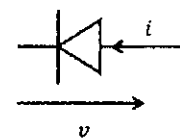
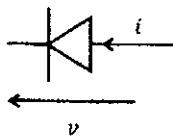
Du haut en bas, on a les 2 quadripôles Q' et Q'' qui sont montés :

- 1- en série ; -2- en parallèle ; -3- en cascade
- 1- en parallèle ; -2- en série ; -3- en cascade
- 1- en série ; -2- en cascade ; -3- en parallèle
- 1- en cascade ; -2- en parallèle ; -3- en série
- 1- en parallèle ; -2- en cascade ; -3- en série
- 1- en cascade ; -2- en série ; -3- en parallèle

7



Cette caractéristique correspond au schéma ci-dessous :

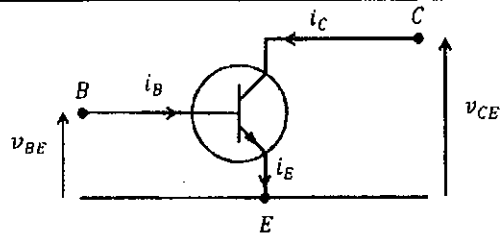


--	--	--	--

8

En régime linéaire (petits signaux), on a :

$$\begin{cases} v_{BE} = h_{11}i_B + h_{12}v_{CE} \\ i_C = h_{21}i_B + h_{22}v_{CE} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} v_{BE} \\ i_C \end{bmatrix} = H \times \begin{bmatrix} i_B \\ v_{CE} \end{bmatrix}$$



Le modèle simplifié du transistor correspond à :

$v_{BE} = h_{11}i_B$ et $i_C = h_{21}i_B$	$v_{BE} = h_{12}v_{CE}$ et $i_C = h_{21}i_B$	$v_{BE} = h_{12}v_{CE}$ et $i_C = h_{22}v_{CE}$	$v_{BE} = h_{11}i_B$ et $i_C = h_{22}v_{CE}$	$v_{BE} = h_{21}i_B$ et $i_C = h_{11}i_B$	<input type="checkbox"/>
---	--	---	--	---	--------------------------

9

Dans l'étude d'un montage en régime « petits signaux alternatifs » avec des transistors en régime de fonctionnement linéaire et le modèle simplifié. (k_n est une constante, les notations sont celles du cours). La proposition suivante est fausse :

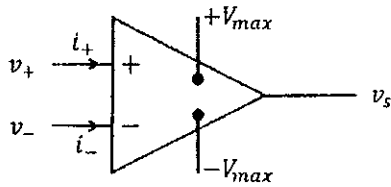
$i_B \approx k_1 v_{BE}$	$i_B \approx k_2 i_C$	i_C est modélisé par une source commandée	Les condensateurs ont une impédance infinie	Les points de potentiel constant sont mis à la masse	<input type="checkbox"/>
--------------------------	-----------------------	---	---	--	--------------------------

10

Dans le cadre du régime « petits signaux alternatifs » pour des montages basés sur des transistors en régime de fonctionnement linéaire, le modèle simplifié et les notations du cours. La proposition suivante est fausse :

$G_V = \frac{v_s}{v_e}$	$G_A = \frac{i_s}{i_e}$	$G_P = \frac{G_V}{G_A}$	$Z_e = \frac{v_e}{i_e}$ lorsque les sources indépendantes en aval ont été neutralisées	$Z_s = \frac{v_s}{i_s}$ lorsque les sources indépendantes en amont ont été neutralisées	<input type="checkbox"/>
-------------------------	-------------------------	-------------------------	--	---	--------------------------

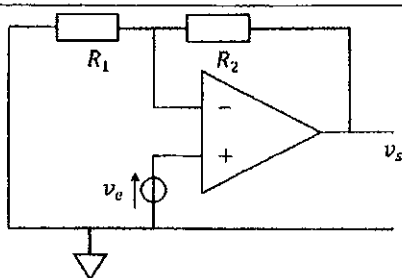
11



Soit un amplificateur opérationnel idéal. En utilisant les notations du cours, la proposition suivante est fausse :

En régime linéaire $v_+ = v_-$	(-) est appelée entrée non-inverseuse	$i_+ = i_- = 0$	En régime linéaire $v_s = A(v_+ - v_-)$	$V_{max} = \max(v_s)$	<input type="checkbox"/>
--------------------------------	---------------------------------------	-----------------	---	-----------------------	--------------------------

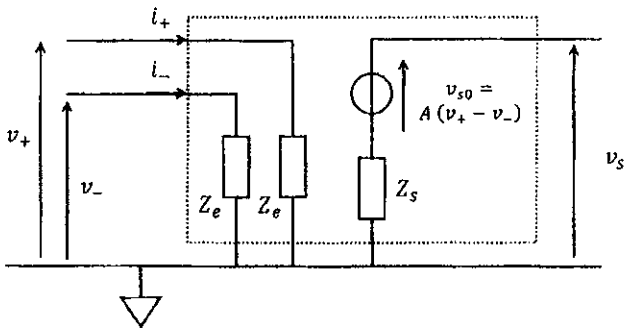
12



Dans ce montage, $v_e = 0.05 V$, $R_1 = 40 \Omega$ et $R_2 = 120 \Omega$. L'AO idéal est alimenté par une source symétrique $\pm 12 V$ et possède un gain interne $A = 2.5 \cdot 10^5$. La tension de sortie est $v_s =$

0.1 V	0.2 V	0.3 V	0.4 V	$\pm 12 V$	<input type="checkbox"/>
-------	-------	-------	-------	------------	--------------------------

13

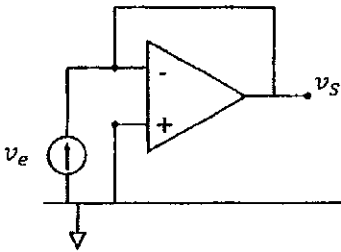


Soit le modèle d'un amplificateur opérationnel en régime linéaire avec Z_e l'impédance d'entrée, Z_s l'impédance de sortie et A le gain interne. Lorsque l'AO est idéal on a :

$Z_e \rightarrow 0$	$Z_e \rightarrow \infty$	$Z_e \rightarrow 0$	$Z_e \rightarrow \infty$	$Z_e \rightarrow \infty$
$Z_s \rightarrow 0$	$Z_s \rightarrow \infty$	$Z_s \rightarrow \infty$	$Z_s \rightarrow 0$	$Z_s \rightarrow \infty$
$A \rightarrow 0$	$A \rightarrow 0$	$A \rightarrow \infty$	$A \rightarrow \infty$	$A \rightarrow \infty$

--	--	--	--	--

14



Soit le montage à amplificateur opérationnel idéal ci-contre alimenté en $\pm 15 V$ avec $v_e = 1 V$.

On a :

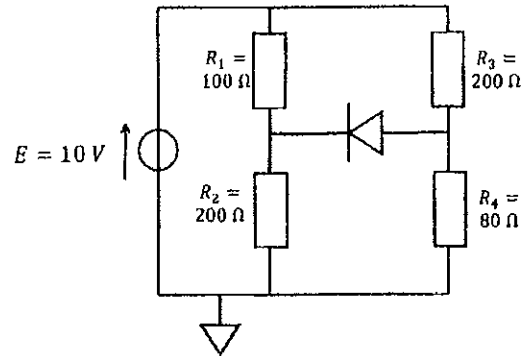
$v_s = 0$	$v_s = 1 V$	$v_s = 15 V$	$v_s = -15 V$	Schéma incohérent
-----------	-------------	--------------	---------------	-------------------

--	--	--	--	--

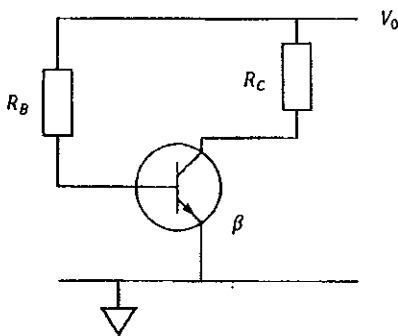
2. Applications (13 pts)

1. Intensité et puissance dissipée par une diode (3 pts)

Dans le montage ci-contre, la diode est supposée parfaite. Calculer le courant I la traversant et la puissance P qu'elle dissipe.



2. Polarisation d'un transistor (3 pts)

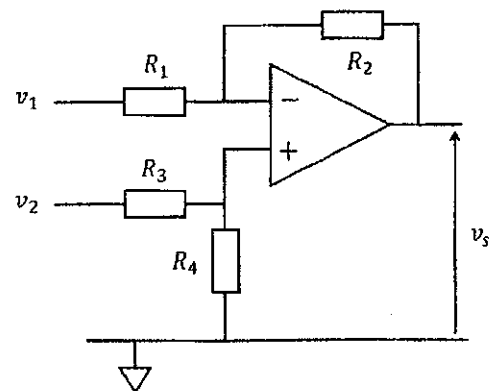


Dans ce montage, on a $V_0 = 10\text{ V}$, $R_B = 10^3\ \Omega$, $R_C = 10^3\ \Omega$ et le gain en courant est $\beta = 10^2$.

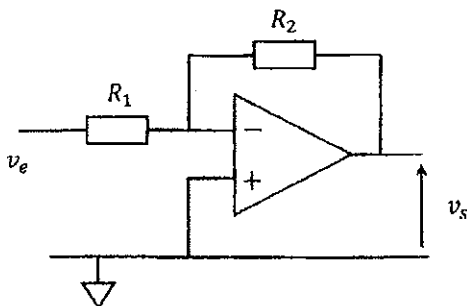
Déterminer l'état du transistor et calculer I_C le courant collecteur ainsi que V_{CE} , la tension Collecteur-Emetteur.

3. Montage amplificateur (4 pts)

Soit le montage ci-contre comportant un AO idéal doté d'une alimentation symétrique $\pm 15\text{ V}$. On a $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$ et $R_4 = 400\ \Omega$. On applique les tensions $v_1 = 1\text{ V}$ et $v_2 = 2\text{ V}$. Calculer la tension de sortie v_S .



4. Réglage d'un montage à AO (3 pts)



Soit le montage ci-contre comportant un AO idéal doté d'une alimentation symétrique $\pm 15\text{ V}$. On a $R_1 = 1.2\text{ k}\Omega$ et R_2 une résistance ajustable.

On applique une tension d'entrée $v_e = 0.3 \cos(\omega t)$.

Soit $v_S(t)$ la tension de sortie.

Déterminer la condition sur R_2 qui permette d'amplifier v_e sans que la sortie v_S ne sature ($-15\text{ V} \leq v_S(t) \leq 15\text{ V}$).

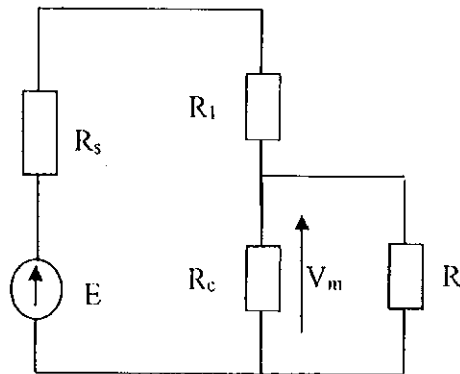
Examen de la 2^{ème} session 22 juin 2019

Capteurs et Instrumentation
(Documents non autorisés)

Exercice 1

On considère le montage suivant :

- E : Source de tension continue
- R_s : résistance interne du générateur
- R_1 : résistance fixe
- R_c : résistance du capteur
- R_i : résistance de l'appareil de mesure

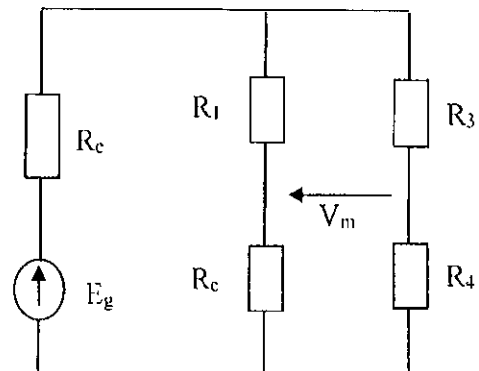


- a) calculer la résistance équivalente au borne de V_m .
- b) Donner une expression de V_m en fonction de E , R_s , R_1 , R_c et R_i .
- c) Sous quelle condition V_m est elle indépendante de l'appareil de mesure? Et dans ce cas, quelle est son expression?
On se place dans les conditions définies au c) et on étudie maintenant les variations de la tension mesurée ΔV_m , lorsque R_c varie de R_{c0} à $R_{c0} + \Delta R_c$. On pose $V_m = V_{m0}$ pour $R_c = R_{c0}$. On suppose que $\Delta R_c \ll R_{c0} + R_1 + R_s$
- d) calculer ΔV_m . On négligera les termes du second ordre.
- e) que vaut la sensibilité de l'ensemble capteur + conditionneur si $R_s + R_1 = R_{c0}$

Exercice 2

On considère le pont résistif de la figure suivante.

- 2.1 Donner l'expression de V_m en fonction des composants du montage. Donner la condition d'équilibre du pont ($V_m = 0$).
- 2.2 On suppose des variations simultanées de la source de tension E_g et du capteur R_c autour du point d'équilibre. Donner l'expression de ΔV_m .
Que peut-on dire des conditions de ΔE_g et ΔR_c sur ΔV_m ?
Comparer aux résultats précédents.



Examen d'Electromagnétisme

2^{ème} session - Durée : 2h
Aucun document n'est autorisé

Question de Cours

- 1) Un aimant se trouve posé à côté d'un anneau métallique. Y a-t-il induction ou non ? Argumentez.
- 2) Enoncer la loi de Lenz sur l'induction électrique.
- 3) Qu'appelle-t-on champ de déplacement de Maxwell ?

Problème 1

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω se propage dans le vide dans une direction quelconque \vec{u} contenue dans le plan (xOy) et faisant l'angle θ avec \vec{Ox} . Le champ électrique \vec{E} de cette onde plane, polarisée rectilignement suivant la direction \vec{Oz} de vecteur unitaire \vec{u}_z s'écrit en notation complexe au point $M(x, y, z)$ à l'instant t sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - ax - by)} \vec{u}_z$$

On donne la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI et la célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ ms⁻¹

- 1)
 - a) Établir l'équation de propagation du champ \vec{E} et \vec{B} (associé) dans le vide.
 - b) En déduire la relation qui lie a , b , ω et c .
 - c) Que représentent les coefficients a et b ? Déterminer en fonction de a et b la longueur d'onde λ et la direction de propagation θ de l'onde.
- 2)
 - a) Exprimer le vecteur champ magnétique \vec{B} de l'onde étudiée. Que peut-on dire des directions des champs \vec{E} et \vec{B} en chaque point ?
 - b) Calculer l'impédance caractéristique du vide Z_0 définie par le rapport des amplitudes du champ \vec{E} et de l'excitation magnétique \vec{H} .
 - c) Montrer que \vec{E} et \vec{B} sont en phase

Problème 2

Un long solénoïde de rayon a petit devant sa longueur et comportant n tours par unité de longueur est entouré par un circuit fermé avec une résistance R (voir la figure).

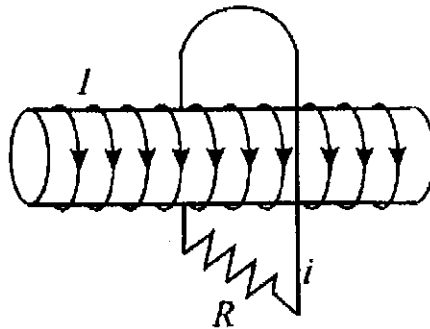


Figure 1 : Solénoïde

a) Un courant I constant circule dans le solénoïde. Dessiner les lignes de champ \vec{B} résultant du courant, en précisant l'orientation du champ.

b) Calculer le flux ϕ du solénoïde sur la figure en fonction de I , n et a . Déterminer la valeur du courant i dans le circuit fermé de résistance R , en argumentant.

Rappel : un solénoïde de longueur L et de nombre de spires N parcouru par un courant I est le siège d'un champ magnétique de module $B = \mu_0(N/L)I$

c) On fait maintenant varier $I(t)$ dans le solénoïde de sorte que $\frac{dI}{dt} = k$. Appliquer la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice e en fonction de ϕ . En déduire la nouvelle expression de i d'abord, en fonction de e et de R et ensuite en fonction de a , n , R et k .

d) Spécifier le sens : *de gauche à droite ou de droite à gauche de $i(t)$* .

e) Si maintenant on tient le courant dans le fil constant à I_0 et on retire le solénoïde en dehors du circuit et on le réinsère dans le sens opposé, quelle charge totale $|\Delta Q|$ passe à travers la résistance ? (*Calculer d'abord la variation totale du flux $|\Delta\phi|$ puis $|\Delta Q|$*).

Examen du Module Electronique Analogique 2 – Session 2
Cours de M. HENAO (Durée 2h00, documents papier autorisés)

Le correcteur attachera **beaucoup** d'importance à la présentation de la copie, à la rédaction de la solution, à la position du problème dans son contexte, à la pertinence de l'analyse et des notations définies. Les réponses littérales et numériques seront bien mises en évidence (encadrées) !

Problème n°1 – Montage différentiel pour l'instrumentation.

On considère le montage de la figure 1 représentant un montage différentiel appliqué à l'instrumentation. En considérant que les gains en boucle ouverte des trois amplificateurs opérationnels comme idéaux (gain infini), déterminer l'expression de la tension de sortie $v_0(t)$ de ce montage, en fonction des deux tensions définies à l'entrée $v_{11}(t)$ et $v_{12}(t)$ et de l'ensemble de résistances constituant ce montage. Avec le résultat obtenu, expliquer l'intérêt de ce type de montage pour l'instrumentation.

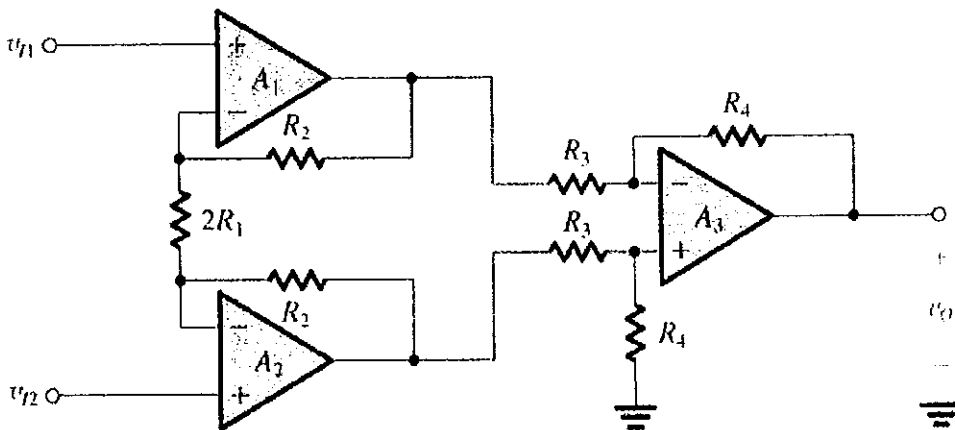


Figure 1. Montage différentiel.

Problème n°2 – Montage intégrateur non inverseur.

On considère le montage intégrateur non inverseur de la figure 2. Déterminer l'expression de la tension de sortie $v_0(t)$ en fonction de la tension d'entrée $v_i(t)$.

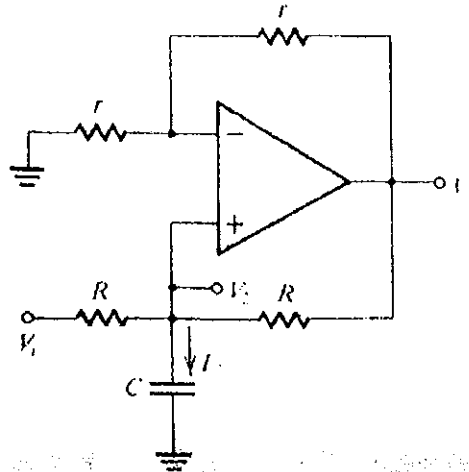


Figure 2. Montage intégrateur non inverseur.

Problème n°3 – Montage convertisseur analogique-numérique parallèle.

1. Donner le schéma de principe d'un convertisseur analogique-numérique parallèle à 3 bits.
2. Quelle est la logique de codage de ce CAN ?
3. Quelle est l'avantage de ce type de CAN ?

2018-2019

Contrôle Continu

Outils mathématiques

Deuxième session

L2S4

1h30

Calculatrices interdites

ATTENTION : La rédaction et la clarté des explications et des raisonnements entreront pour une part importante de la notation

Exercice 1 : Séries de Fourier

On donne la fonction f 2π -périodique paire définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$

1. Faire un dessin sur $[-5\pi, 5\pi]$
2. Démontrer de 2 façons différentes que cette fonction est développable en série de Fourier
3. Déterminer le développement de f en série de Fourier
4. En déduire les valeurs de : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

Exercice 2 : Diagonalisation

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice.
2. Puis déterminer les valeurs propres
3. Expliquer pourquoi M est diagonalisable.
4. Déterminer la matrice diagonale D associée à la matrice M , déterminer la matrice de passage P et son inverse.
5. Vérifier que les deux matrices P et D sont semblables
6. Calculer M^{10}

Exercice 3 : Trigonalisation

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

7. Déterminer le polynôme caractéristique de cette matrice.
8. Puis déterminer les valeurs propres
9. Expliquer pourquoi M n'est pas diagonalisable.
10. Déterminer la matrice trigonale T associée la matrice M , déterminer la matrice de passage P et son inverse.
11. Vérifier que les matrices T et M sont semblables