Examen du mardi 18 décembre 2018 - Durée 2h00

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Il est demandé de justifier les réponses.

Exercice 1. Dénombrer les anagrammes du mot ANAGRAMME.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Écrire le développement de $(1+x)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'il existe C_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1} = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} + C_n$.

(c) Calculer C_n et en déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ en fonction de n.

(d) Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Calculer

$$\sum_{X \subset E} \frac{1}{1+\mathrm{Card}(X)}.$$

Exercice 3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère $E_{p,n} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p | x_1 + \cdots + x_p = n\}$.

(a) Montrer à l'aide d'une bijection que $\mathrm{Card}(E_{p,n})$ est égal au nombre de dispositions de $p-1$ cases noires parmi $n+p-1$ cases alignées.

(b) En déduire la valeur de $\mathrm{Card}(E_{p,n})$.

(c) On suppose $n \geq p$. Soit $F_{p,n} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p | x_1 + \cdots + x_p = n\}$.
Calculer $\mathrm{Card}(F_{p,n})$.

Exercice 4.

(a) Existe-t-il une bijection de $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$?

(b) Existe-t-il une injection de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

(c) Existe-t-il une injection de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$?

Exercice 5.

(a) Montrer que l'ensemble $A = \{a + e^b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable.

(b) L'ensemble $\mathbb{R} \setminus A$ est-il dénombrable ? infini ?

(c) En déduire l'existence d'une infinité de nombre réels qui ne sont pas de la forme $a + e^b$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 6.

(a) Expliquer pourquoi il existe une bijection $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(b) On suppose que φ est une telle bijection et on note $\varphi(t) = (u(t), v(t))$. Montrer que $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective.

(c) Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par v.

(d) Prouver que l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid v(t) = 0\}$ est indénombrable.

Examen TOPOLOGIE L2 S3 2018-2019
Jeudi 19 Décembre 2018

Aucun document et aucune calculette ne sont autorisés. Le barême donné n'est qu'indicatif.

Exercice 1

1) Montrer que
$\forall u, v \in \mathbb{R}, |Argsh(u) - Argsh(v)| \leq |u - v|$ et $|sin(u) - sin(v)| \leq |u - v|$. (0,5+0,5 pts)

2) Montrer que le système d'équation

$$\frac{1}{4} Argsh(x + y) = x$$
$$\frac{2}{3} sin(x - y) = y$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$. (3 pts)

Exercice 2

Soit (E, d) un espace métrique et C une partie de E.

1) Donner 4 propriétés équivalentes qui caractérise le fait que C est une partie connexe de E. (1 pt)

2) Montrer que si C est une partie connexe de E alors $\overline{C}$ l'est également. (1 pt)

3) On suppose que A et B sont deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B$ est non vide, montrer que $A \cap B$ est une partie connexe de E. (2 pts)

Exercice 3

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Donner la définition d'une norme sur E. (1 pt)

2) Soit $\|.\|$ une norme sur E. Montrer que pour la distance associée E n'est pas un espace métrique borné. (1,5 pts)

3) La distance discrète sur E est-elle associée à une norme? (1,5 pts)

Exercice 4

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continue sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$ on pose

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1) Montrer que ceci définit bien une norme sur E. (0,5 pt)

2) Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^1 (1 - t)f(t)dt$$

$\mathbb{R}$ étant muni de sa norme usuelle (la valeur absolue)

a) Montrer que φ est linéaire. (0,5 pts)

b) Montrer que pour $f \in E$, $|\int_0^1 f(t)dt| \leq \|f\|$ et qu'on a une égalité si et seulement si f garde un signe constant. (1 pt)

c) Montrer que $\forall f \in E, |\varphi(f)| \leq |f|$. Que dire de la norme de φ? (1 pt)

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie par

$$f_n(t) = -nt + 1 \text{ si } t \in [0, \tfrac{1}{n}] \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ si } t \in]\tfrac{1}{n}, 1]$$

i) Montrer que $f_n \in E$ et tracer les graphes de f_2 et f_3. (0,5 pt)

ii) Calculer $\|f_n\|$ (0,5 pt)

iii) Montrer que $\varphi(f_n) = \frac{3n-1}{6n^2}$ (0,5 pt)

iv) Peut-on trouver $0 < k < 1$ tel que $\forall f \in E, |\varphi(f)| \leq k.\|f\|$? (1 pt)

v) Que vaut la norme de φ? (1 pt)

Exercice 5

1) Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une application entre deux espaces métriques.

a) Ecrire que f est Lipschitzienne sur E. (0,5 pt)

b) Ecrire que f n'est pas Lipschitzienne sur E. (0,5 pt)

2) La fonction f est localement Lipschitzienne sur E lorsque

$$\forall x \in E, \exists V(x) \text{ un voisinage de } x \;\; t.q. \;\; f \text{ est Lipschitzienne sur } V(x)$$

On va montrer de deux manières que si E est compact alors si f est localement Lipschitzienne sur E alors elle est Lipschitzienne sur E

a) Démonstration directe :

i) Ecrire la propriété de Borel-Lebesgue. (0,5 pt)

ii) Qu'est-ce qu'un voisinage d'un point d'un espace métrique? (0,5 pt)

iii) Montrer qu'on peut trouver un recouvrement de E par des ouverts sur lesquels f est Lipschitzienne. (0,5 pt)

iv) Montrer que f est Lipschitzienne sur E. (1 pt)

b) Démonstration par contraposée

i) Que pouvez-vous dire des suites d'un espace métrique compact? (Propriété de Bolzano-Weierstrass). (0,5 pt)

ii) Montrer que si f n'est pas Lipschitzienne sur E alors il existe deux suites de E , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\delta(f(x_n), f(y_n)) > n.d(x_n, y_n)$. (0,5 pt)

iii) Montrer que $f(E)$ est une partie bornée de F. (1 pt)

iv) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, y_n) \leq \frac{M}{n}$ (0,5 pt)

v) Conclure. (1 pt)

UPJV, UFR Sciences **2018-2019**

Licence de Mathématiques.

L2S3. Algèbre Linéaire 2.

EXAMEN 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $(X-2)^2(X-3)^2$ est le polynôme caractéristique de f .

2) Déterminer les sous-espaces propres ainsi qu'une base et la dimension.

3) f est-elle diagonalisable ? f est-elle trigonalisable ?

4) Sans aucun calcul, donner le polynôme minimal.

5) Trigonaliser f (on donnera une base de $\mathbb{R}^4$ et la matrice triangulaire associée).

6) Donner la décomposition de Dunford de A .

7) Donner la matrice e^A .

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie , f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 5f + 6id_E = 0$.

1) Montrer que f est diagonalisable .

2) Dire pourquoi f est un isomorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et id_E .

3) Pour tout entier n, exprimer f^n en fonction de f, id_E et n .

4) On suppose que f n'est pas une homothétie. En déduire les valeurs propres et le polynôme minimal de f.

Exercice 3.

Soient E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension 3 , g un endomorphisme de E tels que $g^3 = 0$ et $\dim(Ker(g)) = 1$.

1) Montrer que $g^2 = 0 \Leftrightarrow Im(g) \subset Ker(g)$.

2) En déduire que $g^2 \neq 0$ et $\dim(Ker(g^2)) = 2$.

3) Soit $a \notin Ker(g^2)$. Montrer que $g^2(a), g(a), a$ est une base de E.

4) Donner la matrice de g dans cette base .

Application :

Soient E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension 3 , f un endomorphisme de E tels que $\chi_f(X) = (\lambda - X)^3$ et $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.

Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice e^A.

L2, MATHÉMATIQUES 2018-2019

RATTRAPAGE DE THÉORIE DES GRAPHES - JUIN 2019

Questions de cours

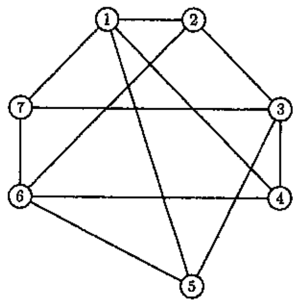
1. Donner la définition d'un arbre.
2. Donner les 5 caractérisations d'un arbre vues en cours.
3. Montrer qu'elles sont équivalentes.

Exercice 1. Six étudiants a, b, c, d, e et f doivent passer des oraux d'une heure avec quatre examinateurs A, B, C, D :

— A doit interroger a, c, d et e
— B doit interroger b, c, d et e
— C doit interroger a, b et e
— D doit interroger a, b, c et d

1. Représenter la situation par un graphe biparti.
2. Trouver la durée minimale de ces oraux et proposer un ordre de passage de ces étudiants.

Exercice 2. Considérons le graphe G ci-dessous :



1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

   (a) G est connexe,
   (b) G est régulier
   (c) G est biparti,
   (d) G est eulérien,
   (e) G est hamiltonien,
   (f) G est planaire.

2. Déterminer le nombre chromatique de G et donner une coloration optimale des sommets.
3. Déterminer l'indice chromatique de G et donner une coloration optimale des arêtes.

Exercice 3. Une *arborescence* est un arbre orienté qui admet une racine. Soit $G = (V, A)$ une arborescence telle que pour tout $s \in V$, $d^+(s) \in \{0, 2\}$.

1. Montrer que V est impair.
2. Montrer qu'il existe deux feuilles ayant le même prédésseur.
3. Montrer que si $V = 2n - 1$, il y a exactement n feuilles.

Examen du lundi 17 juin 2019 (session 2) - Durée 2h00

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Il est demandé de justifier les réponses.

Exercice 1. Un QCM est composé d'une suite de $n \in \mathbb{N}^*$ questions et pour chacune d'elles, $k \in \mathbb{N}^*$ réponses sont proposées (en général $k \geq 2\ldots$) et une seule réponse est correcte.

1. Quel est le nombre de QCM-réponses possibles ?
2. Combien de QCM-réponses possèdent exactement ℓ bonnes réponses, avec $\ell \in [\![1, n]\!]$?
3. On suppose $n \geq 2$. Combien de QCM-réponses possèdent au plus $n-2$ bonnes réponses ?

Exercice 2. Un étudiant descend les marches d'un escalier une ou deux à la fois. On note u_n le nombre de manières de descendre un escalier de n marches.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $(u_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. En déduire u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}$, où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

Exercice 3. Dans une association, chaque membre pratique au moins l'un des trois ateliers suivants : danse, informatique ou musique. Combien l'association compte-t-elle de membres sachant que 42 pratiquent la danse, 28 l'informatique, 36 la musique, 14 la danse et l'informatique, 10 l'informatique et la musique, 18 la musique et la danse, et 6 les trois activités ?

Exercice 4.

1. Existe-t-il une bijection de $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Z}^*$?
2. Montrer que $\mathbb{C}$ est équipotent à $\mathbb{R}^2$. En déduire l'existence d'une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
3. Prouver l'existence d'une surjection $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^5$. Si oui, peut-elle être aussi injective ?

Exercice 5.

1. L'ensemble $A = \{a + \sin b + \cos c \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } c \in \mathbb{N}\}$ est-il dénombrable ?
2. En déduire l'existence d'un nombre réel qui n'est pas de la forme $a + \sin b + \cos c$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$.
3. Existe-t-il une infinité de nombre réels qui ne sont pas de la forme $a + \sin b + \cos c$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$?

Exercice 6. Soient E un ensemble non vide et $f : E^2 \to E$ une injection.

1. Peut-on avoir E fini ?
2. Prouver qu'on définit une injection $g : E^4 \to E$ par $g(x, y, z, t) = f(f(x, y), f(z, t))$.
3. Si f est bijective, en est-il de même de g ?

Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques L2

Année 2018-2019
Suites et séries de fonctions

Examen seconde session - 18 juin 2019 - Durée 2h

La précision et la rigueur de la rédaction seront déterminantes pour la correction de cette épreuve. Vous pouvez utiliser des résultats de questions intermédiaires que vous ne savez pas démontrer, mais vous devrez dans ce cas préciser clairement ce qui est admis. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n+1)\sin x(\cos x)^n$.

(1) Soit $r \in [0, 1[$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)r^n$.

(2) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.

(3) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

(4) La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

(5) Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$. La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $[a, \frac{\pi}{2}]$?

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

(4) Soit $S(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

(5) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $S'(x)$.

Exercice 3. (1) Donner le DSE en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ et en déduire celui de $\arctan x$. Préciser l'intervalle de validité de ces DSE.

(2) On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Calculer son rayon de convergence et montrer que sa somme vaut $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On pourra dériver.

On cherche les fonctions DSE en 0 qui sont solutions de l'équation différentielle $(E) : 2x(1+x)y" + (5x+3)y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ telle que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est solution de (E) sur $]-R, R[$.

(3) Déterminer a_0.

(4) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = -\frac{2n+1}{2n+3}a_n$.

(5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(6) Calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ qui définit f.

(7) Vérifier que f est solution de (E) sur $]-1, 1[$.

(8) Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. On pourra distinguer x positif et x négatif et utiliser les questions (1) et (2).

Exercice 4. Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$, $b_n(f)$ et la série de Fourier associée à f.

(3) Montrer que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.

(4) Calculer $g(0)$ et $g(\pi)$.

(5) En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2018-2019

Licence mention Mathématiques - Semestre 3
Statistique
Examen de mardi 18 juin 2019
Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1

On s'intéresse au taux de cholestérol LDL de la population d'adultes d'un pays. On admet que dans la population étudiée, 5 % des adultes souffrent d'hypercholestérolémie LDL (ils ont un taux de cholestérol LDL trop élevé).

1) Les médecins d'une ville de ce pays s'interrogent sur la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans leur ville. Ils disposent d'un groupe de 400 adultes pris au hasard parmi les adultes de la ville. Ils constatent que 24 d'entre eux souffrent d'hypercholestérolémie LDL.

a) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville.

b) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville est significativement plus élevée que dans l'ensemble de la population. Préciser les hypothèses H_0 et H_1 du test statistique mis en oeuvre et présenter les calculs effectués.

c) La p-valeur associée au test donnée par le logiciel R est p-value = 0,1794. Cela est-il cohérent avec la réponse obtenue au 1) b) ? Justifier la réponse.

2) On suppose maintenant que plus de 5% des adultes de la ville souffrent d'hypercholestérolémie LDL ; autrement dit que la proportion d'adultes souffrant d'hypercholestérolémie LDL dans cette ville est égale à une valeur $p_1 > 0,05$.

a) Rappeler ce que représente la probabilité β d'erreur de deuxième espèce du test effectué au 1) b) et justifier (par le calcul) que pour un risque α donné, on a

$$\beta = P^{H_1}\left(\frac{F - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{400}}} \leq \frac{0,05 + u'_\alpha\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{400}} - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{400}}} \right).$$

b) On suppose que $p_1 = 0,07$ et on prend $\alpha = 0,05$. Calculer β et en déduire la puissance du test effectué au 1) b). Commenter le résultat.

Exercice 2

Un centre hospitalier universitaire souhaite comparer l'efficacité de deux régimes alimentaires distincts, notés A et B, destinés à réduire l'hypertension artérielle dans la population des femmes de plus de 60 ans de la ville. Il constitue, au hasard, deux groupes de 200 femmes de plus de 60 ans de la ville souffrant d'hypertension artérielle :

- après avoir suivi le régime A, 30 femmes du premier groupe de 200 femmes n'ont pas de réduction de leur hypertension artérielle;
- après avoir suivi le régime B, 50 femmes du second groupe de 200 femmes n'ont pas de réduction de leur hypertension artérielle.

Effectuer un test statistique pour savoir si on peut considérer, au risque 5%, qu'il y a une différence significative d'efficacité entre les deux régimes alimentaires en termes de réduction d'hypertension artérielle. Présenter les hypothèses du test et les calculs effectués.

Exercice 3

1) Dans une population donnée, on considère un caractère quantitatif, représenté par une variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ. On considère un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de taille n de X, et les estimateurs $\bar{X}$ et S_c (de μ et σ) dont la définition est rappelée dans le formulaire joint. Soit un réel $\alpha \in]0;1[$.

On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

a) Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

b) Justifier, en détaillant les calculs, que $\left[\bar{X} - \frac{S_c}{\sqrt{n}} t'_\alpha \; ; \; +\infty\right[$ est aussi un intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$. *Par opposition à l'intervalle de confiance bilatéral habituel, cet intervalle de confiance est qualifié d'unilatéral.*

2) Dans une population d'individus non malades, la concentration individuelle de créatinine suit une loi normale de moyenne 10 mg/L.

Dans une population de malades atteints d'une certaines pathologie, on a extrait un échantillon de 20 individus sur lequel on a mesuré une concentration moyenne de créatinine de 11 mg/L et un écart-type corrigé de 1,53 mg/L.

a) Utiliser le résultat du 1) b) pour obtenir un intervalle de confiance (unilatéral) au niveau 95% de la concentration moyenne de créatine chez une personne malade.

b) Effectuer un test statistique pour savoir si on peut considérer, au risque 5%, que la concentration de créatine est trop élevée chez les malades. Présenter les hypothèses du test et les calculs effectués.

c) Le résultat du test du 2) b) est-il cohérent avec l'intervalle de confiance obtenu au 2) a) ? Justifier la réponse.

Exercice 4

On souhaite comparer l'efficacité de deux antiviraux A1 et A2 utilisés chez des sujets atteints de conjonctivite virale. L'objectif est de savoir si l'un des deux antiviraux est plus efficace que l'autre, c'est-à-dire qu'il permet d'avoir, en moyenne, moins de jours avec symptômes cliniques.

Sur un échantillon de 100 sujets atteints d'une conjonctivite confirmée virologiquement, l'antiviral A1 a donné un nombre moyen de jours avec symptômes égal à 4,92 et un écart-type corrigé égal à 1. Sur un autre échantillon de 100 sujets atteints, l'antiviral A2 a donné un nombre moyen de jours avec symptômes égal à 4,57 et un écart-type corrigé égal à $\sqrt{3}$.

1) Peut-on en conclure directement que l'antiviral A2 est plus efficace que l'antiviral A1 ? Justifier.

2) Effectuer un test statistique pour savoir si on peut considérer, au risque 5%, que l'antiviral A2 est plus efficace que l'antiviral A1 ? Présenter les hypothèses du test utilisé et les calculs effectués.

3) Si les deux échantillons précédents avaient donné les mêmes moyennes et écart-types corrigés respectifs, mais avec des tailles respectives de 10 et 15, comment pourrait-on répondre à la question précédente ? Préciser le(s) test(s) à effectuer et les hypothèses à ajouter sur la(es) variable(s) étudiées. **On ne demande pas d'effectuer ce(s) test(s).**

Exercice 5

Le centre de transfusion sanguine d'Amiens a observé la répartition suivante sur 5000 donneurs :

Rhésus \ Groupe	O	A	B	AB
+	2285	1655	272	88
-	315	345	28	12

Effectuer un test statistique pour savoir si on peut considérer, au risque 5%, que le rhésus est indépendant du groupe sanguin. Présenter les hypothèses du test et les calculs effectués.

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$: Student à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\bar{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_c^2$: Khi deux à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
p	$F = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$U = \dfrac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

2) Intervalles de confiance au niveau $1-\alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\ ,\ \bar{x} + \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha}s_c^2\ ,\ \frac{n-1}{a_\alpha}s_c^2\right]$	a_α et b_α tels que $P(Y^2 \geq a_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$, $P(Y^2 \geq b_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\ ,\ f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$

3) Tests de conformité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$ t'_α tel que $P(T < t'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha < Y^2 < b_\alpha) = 1-\alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 \geq b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \dfrac{F-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ u'_α tel que $P(U < u'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$, et remplacer t_α, t'_α et t''_α par u_α, u'_α et u''_α.

4) Tests d'homogénéité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse H_0	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \dfrac{S_{c,1}^2}{S_{c,2}^2}$: Snédécor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\frac{S_{c,1}^2}{n_1} + \frac{S_{c,2}^2}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{c,1,2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s_{c,1,2}^2 = \frac{(n_1-1)s_{c,1}^2 + (n_2-1)s_{c,2}^2}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n - 1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) f_{1,2}(1 - f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5$, $n_1(1 - f_1) \geq 5$, $n_2 f_2 \geq 5$, $n_2(1 - f_2) \geq 5$, avec $f_{1,2} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i.
Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r - 1 - k$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants.

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{i,j} - np_{i,j})^2}{np_{i,j}}$, avec $np_{i,j} = \frac{n_{i,\bullet}\, n_{\bullet,j}}{n}$, $n_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ et $n_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r-1)(s-1)$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

TABLE 1

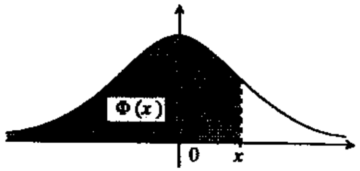
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

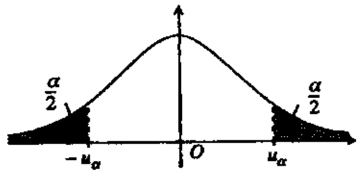
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$P(|U| \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

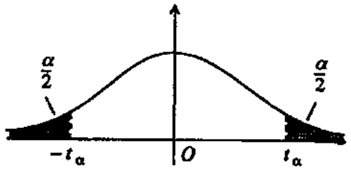


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(|T| \geqslant t_\alpha) = \alpha$.



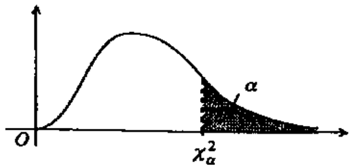
ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (*cf.* table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$.



ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire :

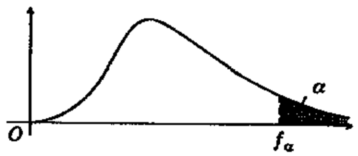
$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}025$.

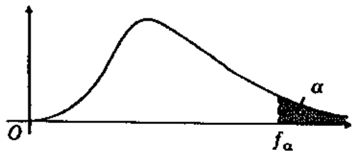


ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05$.



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00

UPJV, UFR Sciences **2018-2019**

Licence de Mathématiques.

L2S3. Algèbre Linéaire 2.

EXAMEN 2éme session (2h)

Les documents et les calculatrices sont interdits. Il est demandé de justifier les réponses.

Exercice 1.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \text{ où } m \text{ est un réel .}$$

1) Montrer que $P = (1-X)(2-X)(m-X)$ est le polynôme caractéristique de f .

2) En déduire :

i) les valeurs de m pour lesquelles f est un isomorphisme .

ii) les valeurs de m pour lesquelles f est trigonalisable .

iii) f est diagonalisable pour $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

3) Déterminer pour $m = 1$ et $m = 2$, les sous-espaces propres ainsi qu'une base et la dimension.

4) Pour quelles valeurs de m f est-il diagonalisable ?

5) On pose $m = 1$.

Trigonaliser f (on donnera une base de E et la matrice triangulaire associée).

6) Donner suivant les valeurs de m le polynôme minimal de f .

7) Déterminer suivant les valeurs de m la décomposition de Dunford de A.

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$, et f un endomorphisme <u>non diagonalisable</u> de E vérifiant $E = Ker(f - 2id_E) \oplus Ker(f - id_E)^2$ et $f - id_E$ non nilpotent.

1) Montrer que $P = (X-2)(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de f .

2) En déduire le polynôme minimal de f .

3) Montrer que :

$\chi_f = (-1)^n (X-2)^k (X-1)^{n-k}$ où $1 \leq k \leq n-2$ et $dimKer(f - 2id_E) = k$.

4) En utilisant la division euclidienne des polynômes, exprimer pour tout entier n, f^n en fonction de f^2, f, id_E et n .

5) Donner e^f en fonction de f^2, f, id_E . (On utilisera l'expression $e^f = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n}{n!}$) .

Exercice 3.

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

Où x, y et z sont des fonctions dérivables sur un intervalle I .

Exercice 1 : Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et soit $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ une base orthonormée.
a) Soit v un élément de E tel que $||v|| = 1$ et tel que l'angle entre v et b_1 est $\frac{\pi}{4}$ et l'angle entre v et b_3 est $\frac{\pi}{3}$. L'élément v, est-il uniquement défini par ces propriétés? Trouver tous les $v \in E$ avec ces propriétés.
b) Trouver l'angle entre v et b_2 dans chaque cas.
c) Pour chaque cas trouver les vecteurs w qui sont orthogonaux à v et qui se trouvent dans le plan engendré par b_2 et b_3.
d) Dans chaque cas trouver le plan orthogonal à v.

Exercice 2 : Dans l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension 3 on fixe une base orthonormée $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ et on considère la forme quadratique Q qui est définie par

$$Q(x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

a) Trouver la signature de Q.
b) Trouver une base orthonormée $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ de E telle que

$$Q(y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3) = s_1y_1^2 + s_2y_2^2 + s_3y_3^2$$

pour certaines valeurs $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$. (NB: Ecrire $Q(x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) = \underline{x}^{tr} \cdot A \cdot \underline{x}$ pour une matrice symétrique A, $\underline{x}^{tr} = (x_1, x_2, x_3)$, et diagolaiser A par une base C orthonormée.)
c) Comment peut-on vérifier a) par le triple (s_1, s_2, s_3) ?
d) Décrire l'ensemble

$$\{(x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) \in E \mid Q(x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) = 36\}$$

par rapport à la base C et par rapport à la base B.

Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

Année 2018/2019

L2 Mention Mathématiques
Analyse Numérique 1
Examen Session 2 du lundi 24 juin 2019
Durée : 2h

Documents interdits
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Question de cours (2 points)

Expliquer comment obtenir la relation de récurrence de la méthode de Newton permettant de résoudre une équation du type $f(x) = 0$, avec $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En donner également une interprétation géométrique.

Question Scilab (1.5 points)

Ecrire une fonction Scilab *trapezes.sci* qui permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ par la formule des trapèzes. Les entrées sont la fonction f et les bornes a et b de l'intervalle. La variable de sortie est la valeur approchée (de I) déterminée par la formule des trapèzes.

Exercice 1 (3 points)

1. Calculer le polynôme d'interpolation P de la fonction $f(x) = \cos(x)$ aux trois points $x_j = \frac{j\pi}{2}$, $j = 0, 1, 2$.
2. Calculer le polynôme d'interpolation P de la même fonction en ajoutant le quatrième point $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2 (5.5 points)

Soit f une fonction $\mathcal{C}([-1,1])$. On souhaite construire une formule de quadrature pour calculer une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. On note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

1. On note P le polynôme d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1. Donner l'expression des polynômes de Lagrange ℓ_i, $i = 1,2,3$ tels que
$$P(x) = f(-1)\ell_1(x) + f(0)\ell_2(x) + f(1)\ell_3(x).$$
2. En déduire les coefficients a_i, $i = 1,2,3$, tels que la formule de quadrature
$$Q(f) = a_1 f(1) + a_2 f(0) + a_3 f(1) \tag{1}$$
est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux. *Indice : $P \in \mathcal{P}_2$.*
3. Supposons que $f \in \mathcal{P}_3$. Soit $P \in \mathcal{P}_2$ son polynôme d'interpolation aux points -1, 0 et 1. On note $s \in \mathcal{P}_3$ le polynôme tel que $f(x) = P(x) + s(x)$. Montrer que s est de la forme $s(x) = a(x^2-1)x$, avec $a \in \mathbb{R}$. En déduire que, dans ce cas, la formule (1) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois. *Indice : calculer l'erreur de quadrature.*

Exercice 3 (8 points)

Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif $a > 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par
$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \quad (a > 0 \text{ fixé}).$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g.
2. Vérifier qu'il existe un seul point d'intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$.
3. Soit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} = g(x_n), \ \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$
Observer graphiquement la convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers le point fixe de la fonction g. Pour cela, tracer la courbe d'équation $y = g(x)$, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite.
4. En appliquant le théorème de point fixe, prouver la convergence observée graphiquement.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

Université de Picardie Jules Verne — 2018-2019
L2 Mathématiques

Rattrapage du contrôle continu final
Langage de Calcul Numérique
Mardi 25 juin 2019
Durée : 2 heures

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2-1}. \tag{1}$$

1. Ecrire une fonction `terme` renvoyant la valeur du terme u_n définit par (1) en fonction de n.
2. A l'aide d'une boucle `for`, écrire un programme stockant les 50 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un vecteur.
3. Tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ en fonction de n. Vers quelle valeur cette suite semble t-elle converger ?
4. Soit l la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$. Mettre en évidence sa vitesse de convergence en visualisant les termes $log(|u_n - l|)$ en fonction de n.
5. Rappeler la définition d'une suite convergente. Ecrire un programme calculant le rang de la suite à partir du quel $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers l avec une précision de 10^{-3}. On utilisera pour cela une boucle `while`.
6. On considère maintenant la suite

$$v_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}, \tag{2}$$

pour tout $n \geq 2$.

7. Ecrire un programme calculant les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ en précisant la méthode qui a été utilisée pour la définir.
8. Visualiser ces termes sur un graphique et comparer les vitesses de convergence des deux suites $(v_n)_{n\geq 2}$ et $(u_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 2.

Soit la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{3}{4}u_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Etudier le comportement de cette suite lorsque n tend vers l'infini.
3. Ecrire un programme permettant de visualiser ce comportement.

Exercice 3.

On considère la fonction f sur $[0\,,1]$ telle que

$$f(x) = x(x-1).$$

1. Définir cette fonction dans Scilab. On pourra utiliser les instructions `deff` ou `function`.
2. Tracer la courbe de cette fonction sur l'intervalle $[0\,,1]$.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Ecrire une fonction `suite` calculant les n premiers termes de cette suite. La fonction prendra en entrées le terme initial u_0 et le nombre n de termes à calculer et renverra un vecteur comportant les n premiers termes de cette suite.
4. La suite vous semble t-elle converger ?
5. Retrouver ce résultat par la théorie. Pour cela, on effectuera un étude des points fixes de la fonction f.

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
UFR des sciences, Licence 2.

Semestre 4 : Calcul différentiel 1

Examen du 26 juin 2019
(Session 2, Durée 2h00)

Aucun document n'est autorisé.
Il sera tenu compte de la prsentation et de la rigueur des dmonstrations.
Exercice 1 : *05 pts*, Exercice 2 : *04 pts*, Exercice 3 : *05 pts* Exercice 4 : *07 pts.*

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$$

1) Calculer la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ avec $y = \frac{x^2}{x-1}$.
2) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2. Trouver le développement de Taylor à l'ordre 3 en $(0,0)$ de la fonction f définie par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(x+y).$$

En déduire toutes les valeurs des dérivées partielles de f d'ordre 3 en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^4}{2} - x^2 - y^2.$$

Chercher les points critiques de f et ses extrema relatifs. f a-t-elle un extremum (maximum ou minimum) absolu ?

Exercice 4. On se propose de résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(*) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Pour cela, on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\psi(u,v) = (u, uv).$$

1) En quels points (u,v) peut-on appliquer le théorème d'inversion à ψ ?

On se place désormais au voisinage d'un tel point. Etant donnée une fonction f des variables x et y, on note g la fonction définie par

$$g(u,v) = f(x,y),$$

obtenue en effectuant le changement de variables défini par $(u,v) = \psi^{-1}(x,y)$.

2) Transformer l'équation $(*)$ en une équation ne faisant intervenir que les dérivées partielles de g.

3) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 solutions de $(*)$.

L2–Licence de Mathématiques

Équations différentielles

Épreuve du 27/06/2019

L'usage de la machine à calculer n'est pas autorisé. Il en sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.

1. Exercices

1. Résoudre le système
$$\begin{cases} x' &= x - y, \\ y' &= x + 3y. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Trouver les valeurs des paramètres a et b pour que la solution nulle, du système
$$x' = \ln(e + ax) - e^y, \quad y' = bx + \tan(y),$$
soit asymptotiquement stable

3. Déterminer les solutions de
$$\begin{cases} x' &= y, \\ y' &= -4x + \sin(2t). \end{cases} \tag{1.2}$$

Problème

On considère le système différentiel suivant:

$$(E) \qquad \begin{cases} x' &= y, \\ y' &= 4x - y - x^2 + 2y^2. \end{cases}$$

1. Etudier la stabilité des points d'équilibre. Tracer les trajectoires dans un voisinage de ces points.
2. Déterminer une fonction de Lyapunov.
3. Déterminer les courbes de la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{k + 4x^2 - \frac{2x^3}{3}},$$
en fonction du paramètre k.
4. Déterminer les trajectoires de (E).

Examen du 27 juin 2019 (session 2) - Durée 2h00

Les calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. Il est demandé de justifier les réponses.

Exercice 1.

Soit $n \geq 2$. Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse. Un robot les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse. Il effectue le même test dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.

(a) Montrer que X suit une loi uniforme.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X.

(c) On suppose à présent que les tests sont effectués par un homme. S'il ne reste que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués par l'homme. Donner la loi de Y.

Exercice 2.

Soient X et Y des variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant, avec $a \in \mathbb{R}$.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0.05	a	0.1
$Y=1$	0.1	0.3	0.25

(a) Calculer la covariance de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles corrélées ?

(b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.

Soit $a > 0$. On considère les coefficients réels $p_{i,j} := C\dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.

(a) Donner la valeur de C pour laquelle ces coefficients forment la loi d'un couple de variables aléatoires réelles.

(b) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant $(p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ pour loi jointe.
   (i) Déterminer les marginales de X et Y.
   (ii) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

(c) (i) Calculer la fonction génératrice G d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   (ii) Déterminer, à l'aide des fonctions génératrices, la loi de la somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes.

Tourner la page

Exercice 4. Trois enfants (Aymeric, Benoît et Cécile) jouent à la balle. C'est Cécile qui a la balle au départ (instant 0).

— Quand à l'instant $n \in \mathbb{N}$ Aymeric a la balle, il la garde à l'instant $n+1$.

— Quand à l'instant $n \in \mathbb{N}$ Benoît a la balle, à l'instant $n+1$ il la lance à Aymeric dans 7 cas sur 8, sinon il la lance à Cécile.

— Quand à l'instant $n \in \mathbb{N}$ Cécile a la balle, à l'instant $n+1$ elle la lance à Benoît dans 3 cas sur 10, sinon elle la garde.

On note A_n (respectivement B_n, respectivement C_n) l'événement "Aymeric (respectivement Benoît, respectivement Cécile) a la balle à l'instant n", et a_n (respectivement b_n, respectivement c_n) sa probabilité.

(a) Déterminer a_0, b_0 et c_0.

(b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Même question pour b_{n+1} et c_{n+1}

(c) Montrer que la suite $(c_n)_n$ est linéaire récurrente d'ordre 2 pour tout entier naturel n.

(d) Calculer c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) En déduire a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

UNIVERSITÉ de Picardie Jules Verne

Examen Session2 Vendredi 28 Juin 2019 H11 11h00-13h00

L2 *S4* *Géométrie du plan et de l'espace*

Les documents et calculatrices sont interdits

Exercice 1 ***(4 pts)***

1) Dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dessiner les cinq points A(5 , 0 ,0), B(0, 10, 0), C(0, 0, 5), D(5, 0 , 5) et E(0 , 5 , −5) puis montrer que A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) Trouver une équation du plan (ABC) puis donner des équations paramétriques de la droite (DE)

b) Montrer que la plan (ABC) et la droite (DE) se coupent en un point I dont on donnera les coordonnées et que l'on placera sur le dessin fait en 1)

Exercice 2 ***(6 pts)*** Soit, dans un plan affine, trois points A, B et C non alignés

1) Soient les trois points I, J et K tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que K = Barycentre {(A,1) , (B, 2) }

b) Interpréter de façon similaire en termes de barycentres les points I et J

c) Monter, par le théorème d'associativité, que les trois droites (AI), (BJ) et (CK) passent toutes les trois par le point G=barycentre {(A, 1), (B, 2), (C, 3)}

2) On rappelle un théorème sur la composée d'homothéties : Si $k_2 \times k_1 \neq 1$ alors la composée $H(\Omega_2, k_2) \circ H(\Omega_1, k_1)$ est une homothétie de rapport $k_2 k_1$ et dont le centre Ω est aligné avec Ω_1 et Ω_2.

Que sait-t-on de cette même composée si $k_2 \times k_1 = 1$?

3) Soit le point L= Barycentre {(A,1) , (B, −2) }

Soit h_1 l'homothétie de centre I de rapport $k_1 = -\frac{2}{3}$ et h_2 l'homothétie de centre J de rapport $k_2 = -3$

a) On considère la composée $f = h_2 \circ h_1$, montrer que f(B)= A.

b) Justifier que f est une homothétie, donner son rapport et en déduire son centre.

c) Que peut-on en conclure pour les points I, J et L ?

3) Illustration : dessiner un triangle ABC ainsi que les points I, J, K, G et L définis précédemment.

Exercice 3 ***(5 pts)*** Dans un plan affine $\mathcal{E}_2$ euclidien et orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit Δ_1 la droite d'équation $x + y - 3 = 0$

1) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S_1 d'axe Δ_1.

2) Montrer que l'application S_2 d'expression analytique $\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$ est une symétrie orthogonale dont on précisera une équation de son axe Δ_2

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $R = S_2 \circ S_1$

Exercice 4 ***(5 pts)*** L'espace affine $\mathcal{E}_3$ est muni d'un repère orthonormé direct

1) Soit un point M (x, y, z), déterminer en fonction de x, y et z les coordonnées (x', y', z') du point M' image de M dans la symétrie orthogonale S_P par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y-z-5 = 0$

2) Soit l'application $f : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$ où $\begin{cases} x' = \dfrac{3x - 6y + 2z + 17}{7} \\ y' = \dfrac{-6x - 2y + 3z + 29}{7} \\ z' = \dfrac{2x + 3y + 6z + 51}{7} \end{cases}$

Vérifier que f est une isométrie, dire s'il s'agit d'un déplacement ou d'un antidéplacement, montrer qu'il n'y a pas de points fixes et que $f = t_u \circ S_P$ où t_u est une translation de vecteur $\vec{u}$ « parallèle » au plan $\mathcal{P}$