Université de Picardie Jules Verne — 2018-2019

Faculté des Sciences — L3 S5

Groupes, anneaux, corps - Examen
Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. Un barême indicatif est donné en gras.

Question de cours (sur **5**) : Les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

1. Rappeler la définition d'un anneau euclidien **1**.
2. Montrer que tout anneau euclidien est principal **2**.
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien **2**.

Exercice préparé (sur **8**) : On note α le nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $\mathbb{Z}[\alpha]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la forme $a + b\alpha$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\alpha] \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X] \\ \sum_k a_k X^k & \longmapsto & \sum_k \overline{a_k} X^k. \end{array}$$

1. Calculer $(\alpha - \frac{1}{2})^2$ et en déduire que α est racine d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2 **1**.
2. Montrer que φ et ψ sont des morphismes d'anneaux **1,5**.
3. En déduire que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$ **2**.
4. A l'aide du premier théorème d'isomorphie, montrer que les anneaux quotients $\mathbb{Z}[\alpha]/(2)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^2 + X + 1)$ sont isomorphes **1,5**.
5. En déduire que $\mathbb{Z}[\alpha]/(2)$ est un corps (*on veillera à bien détailler les arguments*) **2**.

Exercice non préparé (sur **8**) : On pose $\beta = i + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Calculer β^2 et déterminer un polynôme annulateur de β, de degré 4 **1**.
2. Montrer que ce polynôme n'est pas produit de deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2 **1,5**.
3. En déduire le polynôme minimal de β sur $\mathbb{Q}$ **1,5**.
4. A l'aide de la multiplicativité des degrés, calculer $[\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$ **2**.
5. En déduire que $\mathbb{Q}(i + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ **2**.

Université de Picardie Jules Verne | Année 2018-2019
Licence de Mathématiques S5

Exam d'Intégration et Probabilité

le jeudi 20 Décembre 2018, 13h30-15h30 (3 heures), BC21

Attention: *Documents non autorisés. On s'attachera à rédiger de façon claire, précise et concise, et à justifier l'utilisation des résultats du cours. Le barème n'est qu'indicatif.*

LES EXERCICES SONT TOUS INDÉPENDANTS.

Exercice I. (4 points) Questions de cours.

I.1.(2 pts) Donner les définitions exactes des notions suivantes:
la convergence presque partout d'une suite de fonctions,
la mesure de Lebesgue sur la droite,
la mesure image,
la mesure produit de deux mesures de probabilité.

I.2.(1 pts) Enoncer le théorème de Beppo-Levi.

I.3 (1 pts) Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{c}{1+x^4} 1_{[0,\infty[}(x)$ ($c > 0$ étant une constante) et soit $p > 0$ un réel positif. Exprimer $\mathbb{E}(X^p)$ en fonction de f, et préciser la condition sur p pour que $\mathbb{E}X^p < \infty$.

◇ ◇ ◇

Exercice II. (4 points) *Soit f une fonction borélienne dans $L^2(0,1)$. Notons $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$. Le but de cet exercice est de montrer l'égalité suivante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x) dx = \int_0^1 f(x) \log \frac{1}{1-x} dx.$$

II.1.(1 pt) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \|f\|_2.$$

II.2.(1,5pt) Montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} |f(x)| dx < \infty.$$

II.3.(1,5 pt) En déduire l'égalité annoncée tout au début.

Exercice III. (2 points)

Soit f une fonction boélienne et positive définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Définissons

$$\lambda_f(B) = \int_B f(x)dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Montrer que λ_f est une mesure borélienne.

Considérons la fonction $f_c(x) = c|x|e^{-x^2}$ où $c > 0$ est un paramètre. Trouver le paramètre c pour que λ_{f_c} soit une mesure de probabilité, i.e. $\lambda_{f_c}(\mathbb{R}) = 1$.

Exercice IV. (10 points)

On étudie la fonction

$$\phi(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}dx \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

IV.1.(1 pts) Montrer que $\phi(a)$ est bien définie pour tout $a \in \mathbb{R}$ et que la fonction ϕ est impaire.

IV.2.(0,5 pts) Montrer l'égalité

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \quad (\forall x > 0).$$

IV.3.(2 pts) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(ax)e^{-\lambda x}$ is Lebesgue-intégrable sur $[0, \infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 0$, et calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \sin(ax)e^{-\lambda x}dx = \frac{a}{a^2 + \lambda^2}.$$

IV.4.(2 pts) Montrer que

$$\phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

IV.5.(2 pts) En déduire que ϕ est dérivable.

IV.6.(2 pts) Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}dx = \phi'(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Groupes, anneaux, corps - Session 2
Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 1. Enoncer et démontrer le premier théorème d'isomorphie pour les anneaux.

2. En déduire que $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.

Exercice 2 Soit A un anneau commutatif, unitaire.

1. Rappeler la définition d'un idéal premier, d'un idéal principal, d'un anneau principal.

2. On suppose A principal. Soit $p \in A$. Montrer que p est irréductible si et seulement si (p) est premier si et seulement si (p) est maximal.

Exercice 3 Dans le groupe symétrique S_8, on considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère le sous-groupe $\langle\sigma\rangle$ de S_8 engendré par σ. On fait opérer $\langle\sigma\rangle$ sur $\{1, ..., 8\}$ par $g.x = g(x)$.
a) Décrire les orbites.
b) Quel est le stabilisateur de l'élément 2 ?

Exercice 4 Soit G un groupe fini et soit k un corps fini, avec $q = \mathrm{Card}(k)$.

1. Que peut-on dire de q ?

2. Soient $f, g : G \to G$ deux morphismes de groupes. Pour $y \in G$, on pose

$$G_y = \{x \in G \ / \ f(x) = y\}.$$

   (a) Soit $y \in G$ tel que $G_y \neq \emptyset$. Montrer que $\mathrm{Card}(G_y) = \mathrm{Card}(\ker f)$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Card}(g \circ f) \leq \mathrm{Card}(f) \times \mathrm{Card}(g)$.

3. Pour tout diviseur d de $q-1$, on note $f_d : k^* \to k^*$ l'application définie par $f_d(x) = x^d$.

   (a) Montrer que, pour tout diviseur d de $q-1$, f_d est un morphisme de groupes.

   (b) Montrer que $\mathrm{Card}(\ker f_d) \leq d$.

   (c) Soit $d' = (q-1)/d$. Montrer que, pour tout $x \in k^*$, $f_d \circ f_{d'}(x) = f_{d'} \circ f_d(x) = 1$.

   (d) En déduire que $\mathrm{Card}(\ker f_d) = d$, puis que $\ker f_d = \mathrm{im}\, f_{d'}$.

   (e) On suppose q impair. Déduire des questions précédentes que

$$\{x^{\frac{q-1}{2}} \ ; \ x \in k^*\} = \{-1, 1\} \text{ et que } \{x \in k^* \ / \ x^{\frac{q-1}{2}} = 1\} = \{x \in k^* \ / \ \exists y \in k^*, x = y^2\}.$$

LICENCE STS-Math, Semestre S6 — UPJV, 2018-2019

Examen de première session d'*Intégration* (deux heures)

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Bien entendu on peut pour chaque question d'un exercice admettre les résultats des questions précédentes. On veillera à la clarté et à la précision de la rédaction. Un barème est indiqué en marge, sous réserve de modification.

3 **Exercice A** Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 + \cos \arg z\}$.

1 1) Calculer $\det \mathrm{J}\psi$, pour $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (\rho, \theta) \mapsto \rho e^{i\theta}$.

2 2) Calculez l'aire $\lambda_{\mathbb{C}}(\Omega)$ et comparez la avec celle de $\mathrm{B}_{\mathbb{C}}(0,2)$.

9 **Exercice B** Soient $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1$ et $z \geq 0\}$ et $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1$ et $z > 0\}$.

Les questions 1 à 4 ne servent pas pour la suite (sauf comparaison finale).

1,5 1) Calculer pour $0 \leq r \leq 1$ le volume $\lambda_3(D_r)$ où $D_r = \{(x,y,z) \in D \mid z \leq r\}$ (avec la règle de Fubini).

1,5 2) Calculer de même la moyenne $z_D = \dfrac{1}{\lambda_3(D)} \displaystyle\int_{(x,y,z)\in D} z\, dxdydz$.

0,5 3) Préciser alors le centre de gravité (isobarycentre)

$$c_D = \frac{1}{\lambda_3(D)} \int_{(x,y,z)\in D} (x,y,z)\, dxdydz.$$

0,5+ 4) Comparer z_D avec la valeur médiane q_D sur D de $Z : (x,y,z) \mapsto z$, lorsque D est muni de la probabilité induite par $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_3(D)}$.

On donnera une brève justification.

1 5) Calculer la norme (euclidienne) $\lambda_\varphi = \left\| \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right\|$ si $\varphi(\alpha,\beta) = (\cos\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha, \sin\beta)$.

1 6) Justifier $\displaystyle\int_\Sigma g\, d\lambda_\Sigma = \int_{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[\times]0,\frac{\pi}{2}[} g \circ \varphi(\alpha,\beta) \cos\beta\, d\lambda_2$, lorsque g est une fonction numérique borélienne sur Σ (munie de sa mesure de Lebesgue de surface de $\mathbb{R}^3$).

1,5 7) En séduire alors, pour $0 \leq r \leq 1$ l'aire $\lambda_\Sigma(\Sigma_r)$ où $\Sigma_r = \{(x,y,z) \in \Sigma \mid z \leq r\}$ et la médiane q_Σ de Z restreinte à Σ (muni de $\lambda_\Sigma/\lambda_\Sigma(\Sigma)$).

1,5 8) Calculez la moyenne $z_\Sigma = \dfrac{1}{\lambda_\Sigma(\Sigma)} \displaystyle\int_{(x,y,z)\in\Sigma} z\, d\lambda_\Sigma(x,y,z)$ et comparez la avec z_D.

12 **Exercice C** On rappelle que $1 = \displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} g(t)\, dt$ si $g(t) = \dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$.

Les questions 3, 4 et 5 ne servent pas pour la suite.

0,5 1) Calculer $\displaystyle\int_{t\in\mathbb{R}} g_p(t)\, dt$ si $p \geq 1$ et $g_p(t) = pg(pt)$.

0,5 2) Soit $f \in \ell^1(\mathbb{R})$, montrer qu'on définit une application $f_p = f * g_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_p(t) = \displaystyle\int_{s\in\mathbb{R}} f(s) g_p(t-s)\, ds$.

0,5 3) Montrer que g_p' est bornée sur $\mathbb{R}$.

1 4) Montrer que f_p est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1+ 5) Montrer brièvement que f_p est même de classe C^∞.

1,5 6) Montrer que $f_p \in \ell^1(\mathbb{R})$ et que $\|f_p\|_1 \leq \|f\|_1$.

1 7) Montrer pour $r > 0$ que $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} g_p(t)\, dt$.

8) Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-R,R]$,

2 alors $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|f - f_p\|_{[-R,R]}$. En déduire que

2 $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_{t\in\mathbb{R}\setminus[-R,R]} |f_p(t)|\, dt$, puis que $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|f - f_p\|_1$.

2 9) En déduire que $0 = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|f - f_p\|_1$ dès que $f \in \ell^1(\mathbb{R})$.

Examen de seconde session
Juin 2019
Durée 2 heures

Cours et TD interdits. La qualité de la rédaction et la justification des réponses seront particulièrement prises en compte.

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(1)\begin{cases} y'(t) + \frac{\sqrt{y(t)}}{2} = 0, & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution y. Dans quel espace est-elle définie ?
2. Calculer $\sqrt{y(t)}$.
3. Vérifier que la solution est décroissante pour $t \in [0, 4\sqrt{y_0}]$. Quelle est sa valeur lorsque $t = 4\sqrt{y_0}$?

On considère le schéma suivant pour un pas $h > 0$ et y_n une approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{\sqrt{y_n}}{2} = 0.$$

4. Définir la consistance du schéma aux différences finies ci-dessus.
5. Ecrire y_{n+1} en fonction de y_n, puis montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1.
6. Donner une condition sur h pour que le schéma soit stable.
7. En déduire que le schéma converge.
8. Montrer que pour $h \leqslant 2\sqrt{y_0}$, la suite est décroissante et positive. Calculer sa limite.

On considère le schéma suivant pour un pas $h > 0$ et y_n une approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{y_{n+1}}{2\sqrt{y_n}} = 0.$$

9. Ecrire y_{n+1} en fonction de y_n, puis montrer que ce schéma est consistant d'ordre 1.

10. Donner une condition sur h pour que le schéma soit stable.
11. En déduire que le schéma converge.
12. Montrer que la suite est positive et décroissante. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \text{pour } t > 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.
On souhaite résoudre numériquement cette équation en utilisant la méthode à un pas suivante

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right) + \gamma f\left(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n)\right)\right).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étapes et le tableau associé.
2. On donne les tableaux suivants

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

   A quelles valeurs de (α, β, γ) correspondent ces deux méthodes.
3. Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit consistante d'ordre 1.
4. Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit consistante d'ordre 2.
5. On se restreint maintenant à $f(t, y) = y$. Calculer y_1 et $y(t_1)$ en fonction de y_0. Déduire que la méthode n'est pas d'ordre 3.

Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2018-2019
L3S6 Intégration et Probabilité 2.

Deuxième session

27/06/19 durée 2h00

On accordera un soin particulier à la clarté des arguments. Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires sont définies.

Exercice 1. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Donner la fonction de répartition F_X de X.
2. On considère la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$. Donner la fonction de répartition F_Y de Y.
3. En déduire que Y est à densité et déterminer cette densité.

Exercice 2. On considère une v.a réelle X qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Autrement dit P_X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que $P_X(n) = p(1-p)^{n-1}$.

1. Vérifier que P_X définit bien une loi de probabilité.
2. Montrer que la fonction caractéristique φ_X de X vérifie

$$\forall t,\ \varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - e^{it}(1-p)}.$$

Exercice 3. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbf{1}_{\{x>1,\,y>1\}}(x,y)$.

1. Vérifier que f est bien une densité et calculer les densités marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $\Phi : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 < v < u\} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$. On admet que Φ définit un C^1-difféomorphisme de $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 < u,\ 1/u < v < u\}$ dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 1,\ y > 1\}$. Montrer que le jacobien J_Φ de Φ vaut $J_\Phi(u,v) = \frac{-1}{2v}$.
3. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(xy, \frac{x}{y})\frac{1}{x^2y^2}\mathbf{1}_{\{x>1,\,y>1\}}(x,y)dydy = \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\frac{1}{2u^2v}\mathbf{1}_{\{1<u,\ 1/u<v<u\}}(u,v)dudv.$$

4. En déduire la densité du couple $(U,V) = (XY, \frac{X}{Y})$ (on passera par l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour justifier les manipulations).
5. Montrer que la densité marginale f_U de U est donnée par

$$f_U(u) = \frac{\ln u}{u^2}\mathbf{1}_{\{1<u\}}.$$

6. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Donner un exemple d'une suite de variables aléatoires (X_n) qui converge en loi mais qui ne converge pas presque sûrement.

Université de Picardie Jules Verne Année 2018/2019

Licence de Mathématiques - S6 : Topologie Générale
Examen du 28 juin 2019
Durée : 2 heures. Seulement les notes de cours sont autorisées

Exercice 1

1) Démontrer que la famille

$$\mathcal{T}_{cod} := \{\, A \subset \mathbb{R} \,:\, \mathbb{R} \setminus A \,\text{est au plus dénombrable ou}\, A = \emptyset \,\}$$

définit une topologie sur $\mathbb{R}$ (*topologie codénombrable*).

2) Soient A, B deux ouverts non-vides de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$. Démontrer que $A \cap B \neq \emptyset$.

3) Démontrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ est T_1 mais pas T_2.

4) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ est-il séparable ? Justifier la réponse.

5) Pour $m \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $g_m(x) = x^m$. Déterminer toutes les valeurs de m t.q. g_m est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$.

6) Soit $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espace topologique T_2. Démontrer que toute application continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ dans $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est constante.

7) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ est-il connexe? Justifier la réponse.

8) Démontrer que les compacts de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cod})$ sont exactement les parties finies de $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa distance euclidienne.

1) Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de la partie

$$A := \Big(\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 3\,\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}\Big) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \neq 0\}$$

2) La partie $\overline{A}$ est-elle homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$? Justifier la réponse.

3) Est-ce que la frontière de $\mathring{A}$ est un compact ? Justifier la réponse.

4) Déterminer les composantes connexes de A et de $\overline{A}$.

5) Est-ce que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est un connexe ? Justifier la réponse.