LICENCE STS, Semestre 1 UPJV, 2020-2021
Portails InfoMath, MathPhys, MathSPI

Structures Fondamentales

Examen de première session (deux heures)

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Bien entendu on peut pour chaque question d'un exercice admettre les résultats des questions précédentes.

Un barème est indiqué en marge, sous réserve de modification.

3 **Exercice A** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin t$.

1 1) f est elle injective, surjective, bijective ? Préciser $f(\mathbb{R})$. On pourra rappeler l'allure de la courbe représentative de f.

0,5 2) Prouver que $\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}, t \mapsto \tan(t\pi/2)$ est bijective et donner la valeur de l'antécédent $\varphi^{-1}(y)$ de y.

1 3) En déduire un exemple d'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g \circ f$ soit surjective.

0,5 4) Existe-t'il une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g \circ f$ soit injective ? Justifiez votre réponse par un exemple, ou une preuve.

2 **Exercice B** Déterminer $\ell = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{n\sin(n) + in!}{n! + i(-9)^n}$

6 **Exercice C**

Soit $\sigma = \langle 0,3 \rangle \circ \langle 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \rangle \circ \langle 4,8 \rangle \in \mathrm{Perm}(\mathbb{N}_9)$

2 1) Donner les dix images $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, ..., $\sigma(9)$ ainsi que $\sigma^{-1}(0)$.

1 2) Factoriser σ en composée de cycles **à supports disjoints** et en faire un diagramme sagittal sans dédoubler $\mathbb{N}_9$.

1 3) En déduire l'ordre p et la signature $\varepsilon(\sigma)$ de σ.

1 4) Donner aussi $\sigma^{1000}(0)$ et $\sigma^{1000}(5)$. (composée 1000 fois)

1 5) Factoriser σ^{1000} en composée de cycles à supports disjoints.

5 **Exercice D** Soient $P = X^5 + iX + 1$ et $Q = X^{15} + iX^3 + 1$.

1,5 1) Déterminer la forme polaire des racines de P'.

1,5 2) Déterminer le nombre n de racines (distinctes) de P.

1 3) Déterminer le nombre n de racines (distinctes) de Q.

1 4) Q admet-il une racine réelle ? (Justifier votre réponse)

10 **Exercice E** Soit $\delta(n) = \mathrm{card}\,\mathrm{Div}_+ n = \mathrm{card}\{a \in \mathbb{N} \text{ tq } a \mid n\}$

1,5 1) Donner $\delta(12)$ et $\delta(12^{10})$.

0,5 2) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\delta(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée. On veut montrer qu'elle est de limite nulle, et on se donne $\varepsilon > 0$.

0,5 3) Soit $(p_k)_{k\geq 1} = (2,3,5,\ldots)$, l'énumération strictement croissante de l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers. Que vaut p_5 ?

4) Expliquer pourquoi on peut choisir :

1 a) $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2}{p_M} < \varepsilon$

1 b) $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq \alpha \Rightarrow \dfrac{1+k}{2^k} < \varepsilon$

Soient $n_0 = (p_1 p_2 \cdots p_M)^\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$.
On pose $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$, aves les $\alpha_k \in \mathbb{N}$ et $\alpha_N \geq 1$.

0,5 5) Exprimer $\delta(n)$ à l'aide des exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

1 6) Prouver pour tous $k \in \mathbb{N}$ que $k + 1 \leq 2^k$,

1 7) En déduire pour $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}$ que $\dfrac{k+1}{p^k} \leq 1$ et que $k \geq 1 \Rightarrow \dfrac{k+1}{p^k} \leq \dfrac{2}{p}$.

1 8) En déduire pour tout $q \in \mathbb{N}_N^*$ que $\dfrac{\delta(n)}{n} \leq \dfrac{\alpha_q + 1}{p_q^{\alpha_q}}$.

2 9) A l'aide de 5), 7) et 4), en déduire que $\dfrac{\delta(n)}{n} < \varepsilon$, en distinguant suivant que $N > M$ ou non, et conclure.

Université de Picardie Jules Verne
UFR de sciences

Calcul Matriciel (Janvier 2021)

l'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1 :
1) Résoudre l'équation $z^2 + (-1+2i)z + 1 + 5i = 0$.
2) On considère le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 + (5+7i)z + 10 - 2i$.
a) Vérifier que $2i$ est une racine de $P(z)$.
b) En déduire une factorisation de $P(z)$ de la forme $P(z) = (z-2i)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme de second degré à coefficients complexes.
c) Résoudre alors $P(z) = 0$ et factoriser complètement le polynôme $P(z)$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
1) Montrer que P est inversible.
2) Calculer l'inverse de P qu'on notera P^{-1}.
3) Calculer $P^{-1}AP = D$. En déduire D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Déduire de (3), A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :
1) Calculer le déterminant suivant sous forme factorisée : $\begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2) En déduire les valeurs de a, b, c pour lesquelles la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice 4 :
On munit l'espace usuel d'un repère orthonormé direct $\{o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Ainsi on peut identifier l'espace usuel à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
1) On considère les trois points $A(1,2,1)$ $B(2,1,2)$ $C(1,-1,1)$. Montrer qu'il y a un seul plan passant par ces trois point, et donner une équation cartésienne de ce plan. On notera P ce plan.
2) Montrer en détail que P est un sous-espace vectoriel de R^3.
3) On considère la droite d donnée par un système d'équations $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$
Donner un système d'équations paramétriques de d. Dire brièvement pourquoi d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4) Montrer que les deux sous-espaces vectoriels P et d sont supplémentaires dans R^3, c'est-à-dire qu'on a $P \oplus d = \mathbb{R}^3$.

Méthodes et techniques de calculs
Première session 2020-2021

Exercice 1

1) a) Quel est le domaine de définition de la fonction

$$g(x) = \frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}$$

b) Décomposer en éléments simples la fonction g, c'est-à-dire l'écrire sous la forme

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) a) Résoudre sur l'intervalle $I =]2, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_1): \quad (x+1)(x-2)y' - (3x-3)y = 0$$

b) Chercher parmi les fonctions polynômiales de degré 2 une solution sur $\mathbf{R}$ de

$$(E_2): \quad (x+1)(x-2)y' - (3x-3)y = -x^3 + x^2 - 7x + 3$$

c) Quelles sont les solutions de (E_2) sur I, en existe-t'il une satisfaisant $y(3) = 0$?.

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle

$$y'' + 6y' + 9y = cos(3x)$$

1) Quelle est l'équation homogène (EH) associée à (E) ?
2) Quelle est l'équation caractéristique (EC) de (EH) ?
3) Résoudre l'équation (EC).
4) Quelles sont les solutions de (EH) ?
5) Chercher parmi les fonctions de la forme $y(x) = \alpha cos(3x) + \beta sin(3x)$ une solution de (E)
6) Quelles sont les solutions de (E)?

Exercice 3

1) Rappeler la formule de changement de variable dans une intégrale.
2) Grâce au changement de variable $t = e^x$ calculer l'intégrale

$$\int_0^{ln(\sqrt{3})} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

Exercice 4

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = ln\Big(\frac{x-1}{x^2+3x+2}\Big)$$

1) Quel est le domaine de définition de la fonction f?
2) Quel est le domaine de dérivabilité de f et calculer sa fonction dérivée.
3) On donne $\sqrt{6} \simeq 2,45$, donner le tableau des variations de f.

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
Département de Mathématiques

LICENCE 1 : Courbes paramétrées & Géométrie

Examen du 05 mai 2021
(Session 1 : Durée 2 heures)

Les calculettes, les ordinateurs,
les téléphones et les documents ne sont pas autorisés.
Il sera tenu compte de la présentation
et de la rigueur des démonstrations.
Exercice 1 : *10 pts*, Exercice 2 : *12 pts.*
(*Ce barème est donné à titre indicatif*)

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}. \end{cases}$$

1) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une symétrie axiale et en déduire que l'intervalle d'étude peut être réduit à l'intervalle

$$I = [0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[.$$

2) Dresser le tableau de variations conjointes pour $t \in I$, en y incluant les pentes.

3) Déterminer les éventuelles asymptotes.

4) Construire la courbe $\mathcal{C}$, en tenant compte de la symétrie.

5) Trouver une relation entre x et y indépendante de t.

Exercice 2 : On considère la deltoide $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t). \end{cases}$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ possède une symétrie axiale.

2) Etudier la périodicité de la paramétrisation et en déduire que l'intervalle d'étude peut être réduit à l'intervalle $[0, \pi]$.

3) Dresser le tableau de variations conjointes pour $t \in [0, \pi]$, en y incluant les pentes. *On pourra éventuellement utiliser les formules trigonométriques suivantes :*

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

4) Montrer que le point de paramètre $t = 2\pi/3$ est un point de rebroussement de première espèce.

5) Tracer la courbe $\mathcal{C}$, en tenant compte de la symétrie.

6) Déterminer les autres points singuliers de $\mathcal{C}$ ainsi que leurs natures.

7) Calculer la longueur de cette courbe.

UPJV
Dépt Maths

2020-2021

Analyse réelle appliquée
Examen de première session 2020-2021
Durée : 2h00

Exercice 1
Soit g une fonction qui admet pour DL d'ordre 4 en 0

$$g(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + 2x^4 + o(x^4)$$

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f définie par la formule

$$f(x) = ln[g(x)]$$

Exercice 2
Etudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :
a) $u_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]^n$ b) $u_n = (-1)^n tan(\frac{1}{n+1})$ c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left[\frac{n-1}{n+1}\right]^2$

Exercice 3
Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par la formule

$$f(t) = \frac{t}{(t-1)(t-2)(t-3)}$$

a) Donner les domaines de définition et de continuité de la fonction f.
b) Montrer que pour t dans le domaine de définition de f l'expression de $f(t)$ peut se ré-écrire sous la forme

$$f(t) = \frac{a}{(t-1)} + \frac{b}{(t-2)} + \frac{c}{(t-3)}$$

où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
c) Déterminer la nature et éventuellement la valeur de l'intégrale $\int_4^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 4
a) Calculer un équivalent en 0 de $ln(cos(x))$.
b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = ln[cos(\frac{1}{n+1})]$

Exercice 5

Soit $f : [0, +\infty[\to I\!R$ une application continue et décroissante telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

a) Soit $x \geq 0$ fixé, montrer que pour tout entier naturel n on a

$$f(x+n) \geq \int_{x+n}^{x+n+1} f(t)dt \geq f(x+n+1)$$

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ fixé, la **série** de terme général $u_n(x) = f(x+n)$ est convergente . Que vaut la limite de la **suite** $(u_n(x))_{n \in I\!N}$?

c) On note $S(x)$ la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

Exprimer $S(x+1) - S(x)$ en fonction de f.

UPJV 2020-2021
Dépt Maths Analyse Fondamentale

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to-\infty} f(t) = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(t) = b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on suppose que f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction dérivé seconde continue. On veut montrer que l'équation $f''(u) = 0$ admet au moins une solution.
a) Faire un beau dessin.
b) Ecrire la définition formelle (avec des "epsilon" quoi !) de

$$\lim_{x\to-\infty} f(t) = a \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(t) = b \in \mathbb{R}.$$

De l'inégalité $a < b$ déduire qu'il existe deux réels $x_1 < 0 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$, puis qu'il existe un réel c tel que $f'(c) > 0$.
c) Supposons que l'on ait $\forall x \geq c, f''(x) \geq 0$, montrez qu'alors on a
$\forall x \geq c; f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c)$.
Montrer que la propriété
$\forall x \geq c; f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c)$
est en contradiction avec le fait que b est un réel (donc ne vaut ni $-\infty$ ni $+\infty$).
Montrer qu'on peut trouver un réel β tel que $f''(\beta) < 0$.
d) Montrer qu'il existe un réel α tel que $f''(\alpha) > 0$ (inspirez-vous des étapes de la question c))
e) Montrer que l'équation $f''(u) = 0$ admet au moins une solution.

Exercice 2 :
a) Dessiner le graphe d'une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement décroissante qui converge vers le réel ℓ.
b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement décroissante qui converge vers le réel ℓ et U l'ensemble des valeurs prises par cette suite.
- Montrer que U est minorée et majorée.
- Montrer que la borne supérieure de U est dans U.
- Montrer que la borne inférieure de U n'est pas dans U.

c) Donner le domaine de définition et le tableau des variations de la fonction f définie par la formule $f(t) = \frac{t}{t-1}$.
- L'ensemble $A = \{\frac{3^n}{3^n-1}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est il majoré ? minoré ? Quelles sont (si elles existent) sa borne supérieure et sa borne inférieure ?

Exercice 3 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ (où a et b sont des réels) et la relation $\forall n \geq 2, 6u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
a) Exprimer u_n à l'aide de n, a et b.
b) Montrer que si $a + 3b > 0$ alors il existe un rang à partir duquel la suite est strictement décroissante.

Exercice 4 :
- En utilisant une somme de Riemann exprimer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

sous forme d'une intégrale définie.
- Calculer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction logarithme.
- Calculer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

Université de Picardie Jules Verne
Mathématiques
Licence 1
Année 2020-2021

Algèbre linéaire.

Examen du 7 mai 2021 - Durée 2h00

Il est demandé de justifier les réponses. Les réponses sans explication ne seront pas prises en compte. Le barème est donné à titre indicatif, il peut légèrement évoluer.

Question de cours. (3,5 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. 0,5 Donner la définition du noyau $Ker(f)$.
2. 0,5 Donner la définition de l'image $Im(f)$.
3. 1 On suppose dorénavant que dim $E = 5$ et dim $F = 3$. Remplacer les ? dans les inégalités suivantes (on pensera à bien justifier et à donner les meilleures bornes possibles).
$$? \leq \dim Ker(f) \leq ? \quad \text{et} \quad ? \leq \dim Im(f) \leq ?$$
4. 1,5 Peut-on savoir si l'application f est ou n'est pas injective ?
Peut-on savoir si l'application f est ou n'est pas surjective ?
On donnera un exemple de chaque cas pour les réponses négatives et une justification pour les réponses positives.

Exercice 1. (6 points)

(a) (1) Les matrices suivantes sont-elles des matrices d'une projection ? D'une symétrie ?
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on note A la matrice qui est une projection ou une symétrie.

(b) (3) Donner les éléments caractéristiques de A (A représente la projection sur ... parallèlement à ... ou bien A représente la symétrie par rapport à ... parallèlement à ...).

(c) (1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) (1) Donner une base dans laquelle la matrice de l'application associée à A est diagonale, et donner la matrice diagonale correspondante.

Exercice 2. (2 points) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ définie par
$$f(P) = 3P'.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Pour $0 \leq i \leq 2$, soit $P_i(X) = X^i$. Donner la matrice de f dans la base (P_0, P_1, P_2) pour l'espace de départ et (P_0, P_1) pour l'espace d'arrivée.

Tourner la page

Exercice 3. (12 points) On note $\underline{e} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ -5/2 & -2/3 \end{pmatrix}$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\varphi(x, y)$.
2. Soient $e'_1 = (-2, 3)$ et $e'_2 = (a, 5)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le système $\underline{e'} = (e'_1, e'_2)$ est-il une base de $\mathbb{R}^2$?

   On suppose dorénavant que $a = -2$.
3. Donner la matrice de passage P de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{e'}$.
4. Que représente la matrice inverse P^{-1} ?
5. Calculer P^{-1} et en déduire les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base $\underline{e'}$.
6. Donner la matrice B de φ dans la base $\underline{e'}$.
7. Quel est le lien entre la matrice de φ dans la base $\underline{e'}$ pour l'espace de départ et $\underline{e}$ pour l'espace d'arrivée et les matrices introduites précédemment ?
8. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (faire une récurrence).
9. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Écrire sous forme matricielle le système d'équations

$$\begin{cases} x_{n+1} & = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} & = \frac{-5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$$

11. Déterminer l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient le système précédent pour tout $n \in \mathbb{N}$.