L3 Algèbre Linéaire Avancée - Ivan Marin - Examen	2021

Calculatrices et tous documents interdits.

Exercice 1. *Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des scalaires non nécessairement distincts de $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $P \mapsto P(\alpha_0)$, $P \mapsto P'(\alpha_1)$, $P \mapsto P''(\alpha_2), \ldots,$ $P \mapsto P^{(n)}(\alpha_n)$, sont $n+1$ formes linéaires linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Montrer la* formule d'Abel *:*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P(x) = P(0) + P'(1)\frac{x}{1!} + P''(2)\frac{x(x-2)}{2!} \ldots + P^{(n)}(n)\frac{x(x-n)^{n-1}}{n!}$$

3. *Interpréter cette formule en termes de dualité.*

Exercice 2. *Trouver les invariants de similitude de la matrice suivante de $M_4(\mathbb{Q})$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ -2 & 4 & -5 & -9 \\ 2 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 3. *Faire la liste sans répétition de tous les groupes abéliens d'ordre 54. On justifiera avec précision cette liste.*

EXAMEN DU 11 MAI 2021

Les documents, téléphones, calculatrices ainsi que tout autre appareil éléctronique sont interdits.
La qualité et la rigueur de la rédaction compteront pour beaucoup dans l'évaluation.

VOUS DEVEZ **CHOISIR DEUX** EXERCICES PARMI LES TROIS PROPOSÉS ET TRAITER **UNIQUEMENT** CES DEUX EXERCICES. Vous indiquerez clairement sur votre copie quels exercices vous avez choisi de traiter.

Exercice 1. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de produit scalaire euclidien usuel noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré **par abscisse curviligne** de classe C^2 de courbe image $\mathscr{C}$.

1. Justifier qu'il existe un unique vecteur $N(t)$ tel que $(\gamma'(t), N(t))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $t \mapsto N(t)$ est de classe C^1.
2. Vérifier que les applications $t \mapsto \langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$ et $t \mapsto \langle\gamma'(t), N(t)\rangle$ sont constantes et préciser leurs valeurs.
3. Montrer que pour tout t il existe un réel $\rho(t)$ tel que $\gamma''(t) = \rho(t)N(t)$, puis que l'application $t \mapsto \rho(t)$ est continue.
4. Montrer que pour tout t, $N'(t) = -\rho(t)\gamma'(t)$.

Pour tout réel a, on construit un arc $\gamma_a : I \to \mathbb{R}^2$ défini de la manière suivante :

$$\gamma_a(t) = \gamma(t) + aN(t).$$

5. Vérifier que γ_a est de classe au moins C^1, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$. Que peut-on dire de γ_0 ?
6. Montrer que γ_a' peut s'exprimer en fonction de ρ de γ. En déduire que si $a\rho(t) \neq 1$, $\gamma_a'(t)$ est colinéaire à $\gamma'(t)$. Que peut-on dire du point $\gamma_a(t)$ si $a\rho(t) = 1$?

On suppose maintenant que γ est de classe (au moins) C^3 et que la fonction ρ ne s'annule pas. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on suppose que $a\rho(t) \neq 1$ pour tout $t \in I$.

7. Montrer que la fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ est de classe au moins C^1.
8. Montrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $\gamma_a'(t)$ et $\gamma_a''(t)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $0 < r < R$ deux réels positifs fixés. On introduit la fonction g :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\varphi,\theta) & \mapsto & \big((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta\big). \end{array}$$

On appelle *tore de révolution* l'image $\mathscr{T}$ de g.

1. Vérifier que g est une application C^∞ dont la différentielle est injective en tout point.
2. Tracer $\mathscr{T}$.
3. Montrer qu'il existe quatre ouverts O_1, O_2, O_3, O_4 de $\mathbb{R}^2$ qu'on déterminera tels que
   — pour $1 \leq i \leq 4$, la restriction $g_{|O_i}$ de g à O_i est injective.
   — $\mathscr{T} = \bigcup_{i=1}^4 g(O_i)$.

   On déterminera très précisément chacune des quatre images $g(O_i)$.

On note $g_i := g_{|O_i}$, c'est une application injective donc bijective sur son image.
On note $g_i^{-1} : g(O_i) \to O_i$ la bijection réciproque.

4. Pour chaque $1 \leq i \leq 4$, déterminer g_i^{-1}, vérifier qu'elle est continue.
5. En déduire que $\mathscr{T}$ est une surface de classe C^∞.
6. Déterminer l'espace tangent à $\mathscr{T}$ en un point quelconque.
7. Pour tout $\varepsilon > 0$, calculer l'aire du compact $g([\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon])$. En déduire l'aire de $\mathscr{T}$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{P}$ le plan horizontal d'équation $z = 0$. On note $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$. On considère les transformations suivantes

$$\begin{array}{cccc} \pi_N : & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \to & \mathscr{P} \\ & P & \mapsto & (NP) \cap \mathscr{P} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \pi_S : & \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} & \to & \mathscr{P} \\ & P & \mapsto & (SP) \cap \mathscr{P}. \end{array}$$

1. Montrer **sans aucun calcul** que π_N et π_S sont des sont des bijections de leurs domaines de définition respectifs sur $\mathscr{P}$.
2. Soit $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ de coordonnées (x, y, z). Calculer les coordonnées (X, Y) de $\pi_N(P)$ dans $\mathscr{P}$.
3. Soit $Q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ de coordonnées (x', y', z'). Calculer les coordonnées (X', Y') de $\pi_S(Q)$ dans $\mathscr{P}$.
4. Calculer π_N^{-1} et π_S^{-1} et vérifier que π_N et π_S sont des homéomorphismes.

Les applications sont donc des paramétrisations locales de $\mathbb{S}^2$.

5. Calculer $\pi_S^{-1} \circ \pi_N$. Décrire géométriquement cette application.
6. Montrer que π_N^{-1} et π_S^{-1} sont conformes.

Université de Picardie Jules Verne
UFR des Sciences

2020-2021
L3S6 Probabilités.

Examen de probabilités (2h)

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires sont définies.

Exercice 1 On note N la variable aléatoire comptant le nombre d'oeufs pondus par un insecte donné. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose également que chaque oeuf donne naissance à un nouvel insecte avec probabilité $p \in [0,1]$, indépendamment de l'éclosion des autres oeufs. On considère alors une famille $(X_j)_{j\geq 1}$ de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre p. On suppose que les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes et on note D le nombre de descendants de l'insecte.

1. Écrire D en fonction des variables aléatoires N et $(X_j)_j$.
2. Pour tout couple $(n,d) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(D = d \,|\, N = n)$.
3. En déduire la loi de D et la loi du vecteur aléatoire $Z = (D, N)$.
4. Retrouver la loi de D en calculant la fonction génératrice.

Exercice 2
On cherche à donner une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass (densité des polynômes parmi les fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ pour la convergence uniforme). Dans la suite, pour une fonction continue $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Soit $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme Q_n :

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} h\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On considère une suite $(Y_j)_{j\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x \in [0,1]$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$.

1. Rappeler (sans preuve) la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de la v.a. $\frac{S_n}{n}$.
2. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
3. Montrer que l'on peut écrire $Q_n(x) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = h(x).$$
4. On veut montrer à présent que la convergence est uniforme. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$ dans la suite. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in [0,1]$ avec $|y - z| < \delta$, on a $|h(y) - h(z)| < \varepsilon$.
5. On fixe $\delta > 0$ comme à la question précédente. Montrer que l'on a
$$\mathbb{E}\left(\left|h\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - h(x)\right|\right) = \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\delta\right\}} \left|h\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - h(x)\right| dP + \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta\right\}} \left|h\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - h(x)\right| dP,$$
et en déduire que la première intégrale $I_1 := \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP$ satisfait $I_1 \leq \varepsilon$.
6. Montrer que
$$\mathbb{E}\left(\left|h\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - h(x)\right|\right) \leq \varepsilon + 2\|h\|_\infty P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right).$$
7. Montrer que
$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$
et que cette quantité tend vers 0 uniformément en x quand $n \to +\infty$. Conclure.

Exercice 3 *

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Montrer que $X - Y$ est une variable à densité, de densité $h\colon z \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|z|}$.
   (b) En déduire que $|X - Y|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   (c) Montrer que les variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $|X - Y|$ sont indépendantes (où $\min(X, Y)$ est la v.a.r. qui à $\omega \in \Omega$ associe $\min(X(\omega), Y(\omega))$).
2. Soient Z et T deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\alpha \neq \beta$. Déterminer la loi de $Z + T$.
3. **Application** : trois personnes A, B, C se rendent ensemble à l'agence d'une banque qui comporte deux automates; A et B s'installent chacun à un automate, et C remplace le premier des deux qui a terminé. On suppose que les durées d'utilisation de l'automate par A, B, C, notées respectivement X_A, X_B, X_C, sont trois v.a.r. suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Calculer la probabilité pour que C sorte le dernier.
   (b) Déterminer la loi de la v.a.r. T_C, où T_C désigne le temps total passé par C à la banque.
   (c) Montrer que $\max(X_A, X_B)$ et T_C ont la même loi. Ces deux v.a.r. sont-elles indépendantes ?

LICENCE STS-Math, Semestre S6 UPJV, 2020-2021

Examen de 1$^{\text{ere}}$ session (trois heures)

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Bien entendu on peut pour chaque question d'un exercice admettre les résultats des questions précédentes. On veillera à la clarté et à la précision de la rédaction. Un barème est indiqué en marge, sous réserve de modification.

Rappelons que λ_N désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.

3 **Exercice A** Prouver qu'on définit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ par $\Phi(t) = \int_{(x,y)\in[0,1]^2} \frac{x}{e^y + t^2}\, d\lambda_2(x,y)$.

4 **Exercice B** (Fubini+ ch. de va.)

Prouver par récurrence sur $N \geq 1$ que pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_{x\in\mathbb{R}_+^N} \frac{d\lambda_N(x)}{1 + x_1^{\alpha_1} + \cdots + x_N^{\alpha_N}} < +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_N} < 1.$

2 **Exercice C** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calculer $u = \int_{(x,y)\in D} x\, d\lambda_2(x,y)$ et en déduire le centre de gravité de D, relativement à λ_2.

17 **Exercice D** On note pour $T \geq 0$:

$f(T) = \int_0^T e^{it^2}\, dt$, et $F(T) = \int_{[0,T]^2} e^{i(x^2+y^2)}\, dxdy$.

0,5 1) Montrer que $t \mapsto e^{it^2}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1 2) Montrer que $\lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{e^{it^2}}{t^2}\, dt$ converge.

1 3) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la convergence de $\lim_{T\to+\infty} f(T)$ vers une limite $\Phi := \int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ (qui est donc une intégrale impropre semi-convergente).

1,5 4) Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ que $\int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{2n\pi+2\pi}} \sin(t^2)\, dt \geq 0$ (à l'aide de changements de variables et de la relation de Chasles).

1 5) En déduire que $\operatorname{im}(\Phi) \geq 0$. (partie imaginaire)

0,5 6) Montrer que $(x,y) \mapsto e^{i(x^2+y^2)}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$.

1+ 7) Montrer soigneusement, pour $T \geq 0$, que $F(T) = f^2(T)$.

1 8) Si $\Delta_T^+ = \{(x,y) \in [0,T]^2 \mid x \leq y\}$ et $\Delta_T = \{(x,y) \in [0,T]^2 \mid x \geq y\}$, montrer que $F(T) = 2\int_{\Delta_T} e^{i(x^2+y^2)}\, dxdy$.

2,5 9) En déduire, en posant $(x,y) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, que $F(T) = i\frac{\pi}{4} - iG(T)$ où $G(T) = \int_0^{\pi/4} exp\left(\frac{iT^2}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

6 10) A l'aide du changement de variables $u = \frac{T^2}{\cos^2\theta} - T^2$, montrer que $0 = \lim_{T\to\infty} G(T)$.

(Pour $\int_0^1$ on appliquera le théorème de convergence dominée, pour $\int_1^{T^2}$, on fera une intégration par partie et on appliquera le théorème de convergence dominée.)

1 11) En déduire que $\Phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$.

Name :...

UPJV - ANGLAIS

LICENCE 3 - MATHEMATIQUES

Grammar : choose the correct proposition **5 pts**

1) Phil … to be more efficient than his brother.
a) says b) is saying c) is said d) is used

2) I … in the same company since I … college.
a) work / left b) worked / have left
c) have been working / left d) have worked / have left

3) Fiona, …. I met yesterday, is my neighbour's roommate.
a) who b) whom c) whose d) which

4) This is not my report but I think it is … .
a) Mike's b) Mikes' c) Mike d) Mike's one

5) « Do you think they will get the job done in time ? »
« Well, I think... »
a) Ø b) so c) that d) yes

6) It's time we … her the truth.
a) told b) tell c) would tell d) will tell

7) I'd rather you … me before.
a) told b) had told c) have told d) tell

8) Could he tell you what … .
a) the answer is b) is the answer c) was the answer d) the answer was

9) Chris and … are real fans of his work.
a) I b) me c) mine d) us

10) I will be happy when I … done with this test.
a) will be b) am c) am being d) will have

Essay : choose one subject : 250 words (min) **15 pts**

A – Is technology humans' best friend or worst enemy ?

B – Maths is the basic tool of any science. Do you agree with the statement ?

Using Technology to Tailor Lessons to Each Student

Computer algorithms and machine learning are helping students succeed in math. Some experts see such efforts as a crucial next step in education.

When 12-year-old Nina Mones was in sixth **grade** last year, she struggled to keep up with her math class, getting stuck on improper fractions. And as the teacher pushed ahead with new lessons, she fell further and further behind.
Then in the fall of 2019, her charter school, the Phoenix International Academy in Phoenix, brought in a program called Teach to One 360, which uses computer algorithms and machine learning to offer daily math instruction tailored to each student. Nina, now in seventh grade, flourished.
"I'm in between seventh- and eighth-grade math now," she said, proudly. "It gave me more confidence in myself." And when the coronavirus shutdown occurred, she said, her studies continued uninterrupted, thanks to the program's online portal. "This is a model for personalized learning," said Sheldon H. Jacobson, professor of computer science at the University of Illinois at Urbana-Champaign and a risk assessment public policy consultant.
The move toward a tech-driven, personalized learning system, like Teach to One 360 from a **nonprofit** called New Classrooms, is long overdue, experts say. Other industries, such as health care and entertainment, have been **shifting** in this direction for years. Personalized medicine, for example, looks at DNA biomarkers and personal characteristics to map out a patient's most effective treatment, Professor Jacobson said.
And experts say the Covid-19 pandemic might be the **spark** that finally drives schools out of their comfort zones and into the world of innovation and personalized learning programs
"We've seen an embrace of technology that was rapidly accelerated by Covid," said Bob Hughes, director of the K-12 Education in the United States Program at the Bill & Melinda Gates Foundation, which helps finance nonprofits like New Classrooms.
Randi Weingarten, president of the American Federation of Teachers, **backs** such programs. "Innovations like this," she said, "can help educators meet students where they are and address their individual needs."
<u>A number of firms, like New Classrooms, Eureka Math, iReady and Illustrative Mathematics, have been working aggressively to bring personalized learning to the forefront</u> (1). EJoel Rose, a former teacher, and Chris Rush, a technology and design expert, are the brains behind Teach to One 360, which is based in New York. When Mr. Rose first started teaching fifth grade in Houston in the 1990s, he was **stunned** by the number of students whose math skills were two or even three grade levels behind. "Some students were as low as the second grade, and other students as high as the eighth grade, and others in between," he said.This one-size-fits-all system is broken, he said, adding, "It is wildly outdated."
So, in 2009, while working for the New York City schools chancellor, Mr. Rose partnered with Mr. Rush to create School of One (later renamed Teach to One 360), a technology driven math program for students in grades five through 12.Here's how it works: <u>Students take a 90-minute MAP test, which is a standardized test measuring math skills, and a 60-minute diagnostic test to determine **gaps** and strengths</u>. The program then uses algorithms and machine learning to identify problem areas and strengths, and creates a personalized daily lesson or "playlist."It also chooses the modality, or teaching method. Some may get their lesson through a traditional teacher-led class; others will work in small peer groups collaborating with students who are at a similar skill level; and others will work independently, using online interactive videos, games and math programs. Each student is assigned at least two different modalities a day, and a team of at least four math teachers **oversees** the program.At the end of the day, students take a five-question quiz, and the algorithm uses the results to determine the next day's lessons.The program was rolled out to 1,500 students in three public schools — one each in the Bronx, Manhattan and Brooklyn — as a pilot project. In 2011, Mr. Rose **spun off** the program into a nonprofit firm, called New Classrooms, and renamed the program Teach To One.The company has raised $94 million from such entities as the Bill & Melinda Gates Foundation, the Bezos Family Foundation and the Michael & Susan Dell Foundation, as well as government **grants.**

SOURCE:
https://www.nytimes.com/2020/09/29/education/schools-technology-future-pandemic.html

Name :...

I – Match the words and their definitions/synonyms in the table below. **5 pts**

1 – a grade	a – to support
2 - a nonprofit	b – a sizeable difference
3 – to shift	c – to develop an original source
4 – a spark	d – a class rank
5 – to back	e – a financial help
6 – stunned	f – to change from a situation to another one
7 – a gap	g - surprised
8 – to oversee	h- a charity
9 – to spin off	i- to supervise
10 – a grant	j – a starting point

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

II – Right or wrong : use the text to justify. **10 pts**

1) Nina's maths achievements were impacted by the Covid shutdown.

....

....

2) E-learning took more time than other businesses before it was made widely available.

....

....

3) The use of technology for learning was created by the Covid crisis.

....

....

4) The Teach to One 360 method consists in testing kids to have classes with homogeneous levels.

....

....

5) Everyday of the program, each kid will be given tasks depending on their achievements of the previous day.

....

....

III – Translate the underlined passages into French. **5 pts**

....

....

....

....

....

....

UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
UFR des sciences
Département de Mathématiques.
M3. Semestre 5 : Calcul Différentiel 2

Examen, session 1 : 04 janvier 2021
(Durée 2 heures)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Remarquer que $x^4 + y^2 \geq y^2$ et montrer que $x^4 + y^2 \geq 2\,x^2\,y$.

2) Montrer que f et g sont continues en $(0,0)$.

3) Montrer que f et g admettent des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.

4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$. Qu'en est-il de g ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y) = y^2 + y\,\cos(x) - \sin(x) - 2.$$

Chercher ses points critiques et ses extrema relatifs. La fonction f a-t-elle un extremum (maximum ou minimum) absolu ?

Exercice 3. Soit g une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, avec $g(1,0) = 1$. Pour quelle(s) condition(s) sur g, l'équation $g(xy, xz) + g(\mathrm{e}^z, yz) = 2$ peut-être résolue au voisinage du point $(1,1,0)$ par $z = \varphi(x,y)$. Exprimer les dérivées partielles de la fonction φ en termes de dérivées partielles de g.

Exercice 4. En utilisant les extrema liés, déterminer les points de l'hyperbole

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + 8xy + 7y^2 = 16\}$$

les plus proches de l'origine.