RÉCURRENCE

6) On démontre ci-dessous la propriété suivante : pour tout ensemble d'individus, les individus de cet ensemble ont le même âge.
On commence par formaliser la propriété : soit le prédicat $ma(x,y)$ qui signifie "x a le même âge que y", alors la propriété à démontrer (que l'on notera MA) peut s'énoncer de façon formelle suivante, où E est un ensemble d'individus :
$$\forall E, \forall x, \forall y, \big((x,y) \in E^2\big) \to ma(x,y).$$
Il faut donc faire apparaître un entier qui servira de base à notre récurrence, cet entier est tout simplement le cardinal de E. MA peut donc s'écrire comme $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} P(n)$ où $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}$ est le $\wedge$ généralisé et $P(n)$ est la propriété suivante :
$$\forall E, (|E| = n) \to \Big(\forall x, \forall y, \big((x,y) \in E^2\big) \to ma(x,y)\Big)$$
Pour démontrer que MA est vraie, il suffit de démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n
Démonstration de la vérité de $P(n)$:

- Initialisation :
  - $n = 0$: dans ce cas $E = \emptyset$, et le prédicat $(x,y) \in E^2$ est faux, donc l'implication $\big((x,y) \in E^2\big) \to ma(x,y)$ est toujours vraie. $P(0)$ est donc vraie.
  - $n = 1$: dans ce cas E ne contient qu'un élément. Donc $\big((x,y) \in E^2\big) \vDash (x = y)$ et $(x = y) \vDash ma(x,y)$, ce qui nous permet de déduire que l'implication $\big((x,y) \in E^2\big) \to ma(x,y)$ est toujours vraie. $P(1)$ est donc vraie.
- Hérédité : a-t-on $P(n) \vDash P(n+1)$?
  Soit E un ensemble quelconque d'individus de cardinal $n+1$. $E = \{a, b, c, \dots\}$.
  Posons $E_a = E \setminus \{a\}$ et $E_b = E \setminus \{b\}\}$, E_a et E_b ont chacun un cardinal égal à n. On peut donc appliquer l'hypothèse d'hérédité et ainsi tous les individus de E_a ont le même âge, de même pour ceux de E_b. En particulier $ma(b,c)$ est vrai dans E_a et $ma(a,c)$ est vrai dans E_b. De $ma(b,c)$ et $ma(a,c)$ on peut conclure, par transitivité, que $ma(a,b)$ est vrai dans E. Puisque pour tout autre couple (x,y) de E^2 $ma(x,y)$ est vrai (puisque ces couples sont dans E_a ou E_b), $P(n+1)$ est vérifié. L'hérédité est donc vérifiée.
- Conclusion : La propriété $P(n)$ étant vraie pour les premiers rangs et l'hérédité étant vérifiée, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question : ce résultat étant faux en général (sinon cela signifierait en particulier que vous avez le même âge que moi… no comment !), expliquer précisément quelle est l'« escroquerie » contenue dans cette démonstration.

Réponse :
L'escroquerie apparaît dans la démonstration de l'hérédité et la conclusion, mais de façon subtile : en effet on ne peut pas affirmer que la démonstration de l'hérédité est fausse, il lui manque juste une mention explicite de la valeur minimale de n : cette démonstration est parfaitement juste à partir de $n = 2$ mais pas pour n =1 (en effet lorsque j'écris $E = \{a, b, c, \dots\}$, cela suppose que le cardinal de E, à savoir $n+1$, est supérieur ou égal à 3 et donc que n est supérieur ou égal à 2). L'erreur se trouve donc dans la conclusion : par son manque de précision elle ne pointe pas le fait qu'il n'y a pas de valeur commune entre les indices où la propriété est vraie dans l'initialisation et les indices utilisés pour l'hérédité. Il aurait fallu écrire en conclusion :

> La propriété $P(n)$ étant vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et l'hérédité étant vérifiée pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et on aurait pu voir que l'on ne pouvait pas déduire du début des prémisses de la conclusion que $P(n)$ était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarque 1 : on pouvait réfuter cette démonstration en bloc en exhibant le contre-exemple évoqué dans l'énoncé (vous avez le même âge que moi), mais ce n'était pas l'objet de la question qui était bien de découvrir où se trouvait l'escroquerie dans le raisonnement dont on savait à l'avance qu'il était faux.
Remarque 2 : La notion de réalité peut nous jouer aussi de sacrés tours par rapport à l'intuition anthropomorphique... ainsi si on définit toujours l'âge en nombre d'années et que l'on restreint le problème aux papillons, alors la propriété $P(2)$ devient vraie : quels que soient les couples de papillons

que l'on peut rencontrer ils ont toujours le même âge, à savoir moins d'un an (un papillon adulte vit au plus une dizaine de mois pour les espèces ayant la plus grande longévité). On obtient alors de façon strictement formelle le bon résultat, à savoir : pour tout ensemble de papillons, les papillons de cet ensemble ont le même âge.

Attention : Dans tout ce qui suit, vous soignerez particulièrement la rédaction en présentant la propriété recherchée $P(n)$, l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

7) Démontrer par récurrence les deux affirmations suivantes :

a. Pour tout entier naturel n
$2(0+1+2+\cdots+(n-1)+n)=n(n+1)$

b. Pour tout réel a ($a\neq 0$ et $a\neq 1$) et tout entier naturel n
$a^0+a^1+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

a. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P(n) : 2(0+1+2+\cdots+(n-1)+n)=n(n+1).$$

En notation synthétique, le membre gauche de cette équation s'écrit $2\times\sum_{i=0}^{n} i$, ce qui nous permet de réécrire $P(n)$ de la façon suivante :

$$P(n) : 2\times\sum_{i=0}^{n} i=n(n+1).$$

Initialisation :

Pour $n=0$, on a $\sum_{i=0}^{0} i=0$ et $P(0)$est définie par : $2(0)=0(0+1)$.
$P(0)$ est vraie puisque les 2 expressions sont égales à 0.

Hérédité :

Il faut montrer que $\forall n,(n\in\mathbb{N})\rightarrow\big(P(n)\vDash P(n+1)\big)$ (hérédité simple). Autrement dit, il faut montrer que pour tout entier naturel n, si $P(n)$ est vraie alors on peut en déduire que $P(n+1)$ est vraie.
On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) : 2\times\sum_{i=0}^{n+1} i=(n+1)(n+2).$$

Le membre gauche de cette équation peut aussi s'écrire de la façon suivante : $2\times\big(\sum_{i=0}^{n} i+(n+1)\big)=\big(2\times\sum_{i=0}^{n} i\big)+2(n+1)$
Or, par hypothèse sur $P(n)$, on a $2\times\sum_{i=0}^{n} i=n(n+1)$.
Ce qui donne : $2\times\sum_{i=0}^{n+1} i=2\times\big(\sum_{i=0}^{n} i+(n+1)\big)=n(n+1)+2(n+1)$
Et en factorisant par $(n+1)$: $2\times\sum_{i=0}^{n+1} i=(n+1)(n+2)$.
Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $P(n)$ et l'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'hérédité simple est vérifiée, donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

b. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P(n) : \forall a,(a\in\mathbb{R}\setminus\{0{,}1\})\rightarrow\left(a^0+a^1+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right).$$

En notation synthétique, le membre gauche de cette équation s'écrit $\sum_{i=0}^{n} a^i$, ce qui nous permet de réécrire $P(n)$ de la façon suivante :

$$P(n) : \forall a,(a\in\mathbb{R}\setminus\{0{,}1\})\rightarrow\left(\sum_{i=0}^{n} a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right).$$

<u>Remarque :</u> comme $a\neq 0$, a^0est toujours défini et vaut 1, de même, comme $a\neq 1$, $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ est bien défini.

Initialisation :

Pour $n = 0$, le membre droit de $P(0)$ est défini par : $\sum_{i=0}^{0} a^i = \frac{a^1-1}{a-1}$. Or $\sum_{i=0}^{0} a^i = a^0 = 1$ et $\frac{a^1-1}{a-1} = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Il faut montrer que $\forall n, (n \in \mathbb{N}) \rightarrow \big(P(n) \vDash P(n+1)\big)$ (hérédité simple). Autrement dit, il faut montrer que pour tout entier naturel n, si $P(n)$ est vraie alors on peut en déduire que $P(n+1)$ est vraie.

On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) :: \forall a, (a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}) \rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}\right).$$

Le membre gauche de l'équation peut aussi s'écrire de la façon suivante : $\sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1}$.

Or, par hypothèse sur $P(n)$, on a $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Ce qui donne : $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1}$.

Ce qui donne pour le membre droit :

$\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + \frac{a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + \frac{a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-a^{n+1}+a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$.

On obtient alors $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$ qui est bien le membre droit de l'implication de $P(n+1)$.

Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $P(n)$ et l'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hérédité simple est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

8) Soit S la suite infinie de nombres $s_0, s_1, s_2, \ldots\ s_i \ldots$ définie par :

$$s_0 = 0 \text{ et pour tout } i > 0, s_i = 2s_{i-1} + 1$$

Donner la formule close (formule ne faisant pas intervenir d'éléments de la suite) de s_i.

La difficulté supplémentaire par rapport aux deux précédents exercices est que l'on ne donne pas la propriété à vérifier. Il faut donc d'abord chercher la formule avant de démontrer qu'elle répond à la question.

On commence donc par calculer les premières valeurs de la suite pour essayer d'en déduire une formule générale :

- $s_0 = 0$,
- $s_1 = 2s_0 + 1 = 1$,
- $s_2 = 2s_1 + 1 = 2\times1 + 1 = 3$,
- $s_3 = 2s_2 + 1 = 2\times3 + 1 = 7$,
- $s_4 = 2s_3 + 1 = 2\times7 + 1 = 15$.

On peut alors remarquer que :

- $s_0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$,
- $s_1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$,
- $s_2 = 4 - 1 = 2^2 - 1$,
- $s_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1$,
- $s_4 = 16 - 1 = 2^4 - 1$.

La formule close semble être, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n - 1$. Pour pouvoir l'affirmer, il faut montrer que la propriété $P(n) : s_n = 2^n - 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

La réponse est triviale d'après les exemples construits ci-dessus : $P(0), P(1), P(2), P(3)$ et $P(4)$ sont vraies. On pourra remarquer que « $P(0)$ est vraie » suffit pour faire la démonstration.

Hérédité :

Il faut montrer que $\forall n, (n \in \mathbb{N}) \rightarrow \big(P(n) \vDash P(n+1)\big)$ (hérédité simple).

On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) : s_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

Par définition de S et comme $n+1 > 0$, on a : $s_{n+1} = 2s_n + 1$. D'autre part, par hypothèse d'hérédité $P(n)$ on a : $s_n = 2^n - 1$. Donc on a $s_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$. Ce qui donne :

$$2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

On obtient donc $s_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ qui est bien $P(n+1)$. Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $P(n)$ et l'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hérédité simple est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Puisque $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n - 1$ est bien la formule close pour tout élément de S.

9) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3 \text{ et pour tout } n \geq 2,\ u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$$

Donnez la formule close pour tout élément de la suite.

On commence par calculer les premières valeurs de la suite pour essayer d'en déduire une formule générale :

- $u_2 = 4u_1 - 3u_0 = 12 - 3 = 9$,
- $u_3 = 4u_2 - 3u_1 = 36 - 9 = 27$,
- $u_4 = 4u_3 - 3u_2 = 108 - 27 = 81$.

On peut alors remarquer que :

- $u_0 = 3^0$,
- $u_1 = 3^1$,
- $u_2 = 3^2$,
- $u_3 = 3^3$,
- $u_4 = 3^4$.

La formule close semble être, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$. Pour pouvoir l'affirmer, il faut montrer que la propriété $P(n) : u_n = 3^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

La réponse est triviale d'après les exemples construits ci-dessus : $P(0), P(1), P(2), P(3)$ et $P(4)$ sont vraies. On peut remarquer que « $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies » suffit pour faire la démonstration, mais que « $P(0)$ est vraie » ne suffit pas : en effet la définition récurrente d'un élément nécessite que les deux précédents termes soient définis, en particulier u_2 ne peut être défini uniquement à partir de u_1.

Hérédité :

Puisque cette fois-ci on a besoin de plus d'un terme pour définir le suivant, l'hérédité simple ne va pas suffire pour la démonstration. Il faut montrer que $\forall n, (n \in \mathbb{N}^*) \rightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{n} P(i) \vDash P(n+1)\right)$ (hérédité forte).

On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) : u_{n+1} = 3^{n+1}.$$

Par définition de (u_n) et comme $n+1 \geq 1$, on a : $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$. D'autre part, puisqu'on a bien $n \geq 0$ et $n-1 \geq 0$ (sinon on ne peut pas appliquer l'hypothèse), par hypothèses d'hérédité sur $P(n)$ et $P(n-1)$ on a : $u_n = 3^n$ et $u_{n-1} = 3^{n-1}$. Donc on a $u_{n+1} = 4{\times}3^n - 3{\times}3^{n-1}$. Ce qui donne :

$$4{\times}3^n - 3{\times}3^{n-1} = 4{\times}3^n - 3^n = 3^n(4-1) = 3^{n+1}.$$

On obtient donc $u_{n+1} = 3^{n+1}$ qui est bien $P(n+1)$. Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $\bigwedge_{i=0}^{n} P(i)$ et l'hérédité forte est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*(n \geq 1)$.

Conclusion :

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*(n \geq 1)$, l'hérédité forte est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Puisque $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$ est bien la formule close pour tout élément de (u_n).

10) On considère la suite (u_n) à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 5}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P(n) : u_n \leq u_{n+1}.$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2u_0 + 5} = \sqrt{5}$ et $P(0)$est définie par : $u_0 \leq u_1$.
$P(0)$ est vraie puisque $0 < \sqrt{5}$.

Hérédité :

Il faut montrer que $\forall n, (n \in \mathbb{N}) \rightarrow \big(P(n) \vDash P(n+1)\big)$ (hérédité simple).
On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) :\ u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Par définition, on a $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 5}$ et $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1} + 5}$.
D'après $P(n)$, on a $u_n \leq u_{n+1}$. On a donc les déductions suivantes :

$$(u_n \leq u_{n+1}) \vDash (2u_n \leq 2u_{n+1}) \vDash (2u_n + 5 \leq 2u_{n+1} + 5) \vDash (\underbrace{\sqrt{2u_n + 5}}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{\sqrt{2u_{n+1} + 5}}_{u_{n+2}}).$$

Cette dernière déduction étant due au fait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante.
Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $P(n)$ et l'hérédité est vérifiée.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hérédité simple est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leq u_{n+1}$.

11) Soit U la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1, u_n = u_{n \text{ div } 2} + 1$$

Prouvez que pour tout $n \geq 1, u_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière par défaut de X.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 1)$, on pose :

$$P(n) : u_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1.$$

Initialisation :

<u>Remarque :</u> les fonctions log n'étant pas définies en 0, $P(0)$ n'est pas définie non plus. L'initialisation ne peut donc commencer qu'à partir de $n = 1$.

- $n = 1$:
  Par définition $u_1 = u_{1 \text{ div } 2} + 1 = u_0 + 1 = 1$.
  Comme $\log_2(1) = 0$, on a $\lfloor \log_2(1) \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1$ et $P(1)$ est vraie.
- $n = 2$:
  Par définition $u_2 = u_{2 \text{ div } 2} + 1 = u_1 + 1 = 2$.
  Comme $\log_2(2) = 1$, on a $\lfloor \log_2(2) \rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$ et $P(2)$ est vraie.
- $n = 3$:
  Par définition $u_3 = u_{3 \text{ div } 2} + 1 = u_1 + 1 = 2$.
  Comme $1 < \log_2(3) < 2$, on a $\lfloor \log_2(3) \rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$ et $P(3)$ est vraie.

On remarquera dans la suite que « $P(1)$ est vraie » suffit pour montrer l'hérédité.
Pour ceux qui ne sont pas à l'aise avec les « log », il est conseillé de calculer $P(n)$ jusque $n = 16$.

Hérédité :

On peut remarquer que la définition de u_3 dépend de u_1 et pas de u_2.

Plus généralement, on a, pour tout $n \geq 3$, $n\ div\ 2 \neq n-1$. Donc l'hérédité simple ne peut être utilisée ici et il faut utiliser l'hérédité forte. Il faut donc montrer que :

$$\forall n, (n \in \mathbb{N}^*) \rightarrow \left(\wedge_{i=1}^{n} P(i) \vDash P(n+1)\right).$$

On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) : u_{n+1} = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1.$$

Par définition, on a : $u_{n+1} = u_{(n+1)\ \mathrm{div}\ 2} + 1$. Pour appliquer l'hypothèse d'hérédité, il faut d'abord vérifier que $u_{(n+1)\ \mathrm{div}\ 2}$ est bien un élément de de la suite U dont l'indice est compris entre 1 et n, autrement dit que l'on a bien : $1 \leq (n+1)\ \mathrm{div}\ 2 \leq n$.

- Comme $(n+1) \geq 2$ et comme la fonction $x \mapsto x\ \mathrm{div}\ 2$ est croissante, on obtient :
$$(n+1)\ \mathrm{div}\ 2 \geq 2\ \mathrm{div}\ 2 = 1$$
- Par définition de la division entière, on a $(n+1)\ \mathrm{div}\ 2 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, or pour $x \geq 2$, on a toujours $\frac{x}{2} < x$. Donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor < n+1$ et, comme n est un entier, on a $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq n$, ce qui donne bien $(n+1)\ \mathrm{div}\ 2 \leq n$.

On peut donc appliquer l'hypothèse d'hérédité sur $u_{(n+1)\ \mathrm{div}\ 2}$, ce qui donne :

$$u_{n+1} = u_{(n+1)\ \mathrm{div}\ 2} + 1 = \underbrace{\left(\left\lfloor \log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) \right\rfloor + 1\right)}_{u_{(n+1)\ \mathrm{div}\ 2}} + 1.$$

Il y a deux cas à étudier :

- $(n+1)$ pair :
dans ce cas $(n+1)\ \mathrm{div}\ 2 = \frac{n+1}{2}$ et donc :
$\log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{2}\right) = \log_2(n+1) - \log_2(2) = \log_2(n+1) - 1.$
On a alors
$$u_{n+1} = \left(\left\lfloor \log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) \right\rfloor + 1\right) + 1 = (\lfloor \log_2(n+1) - 1 \rfloor + 1) + 1 =$$
$$(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1 + 1) + 1 = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1$$
- $(n+1)$ impair :
dans ce cas $(n+1)\ \mathrm{div}\ 2 = n\ \mathrm{div}\ 2 = \frac{n}{2}$ et donc :
$\log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) = \log_2\left(\frac{n}{2}\right) = \log_2(n) - \log_2(2) = \log_2(n) - 1.$
On a alors
$$u_{n+1} = \left(\left\lfloor \log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) \right\rfloor + 1\right) + 1 = (\lfloor \log_2(n) - 1 \rfloor + 1) + 1 =$$
$$(\lfloor \log_2(n) \rfloor - 1 + 1) + 1 = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$$
D'autre part :
on a $\log_2(n) < \log_2(n+1) < \log_2(2n)$ qui peut s'écrire
$$\log_2(n) < \log_2(n+1) < \log_2(n) + 1.$$
D'où $\lfloor \log_2(n) \rfloor \leq \lfloor \log_2(n+1) \rfloor < \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ ce qui permet de déduire :
$$\lfloor \log_2(n) \rfloor = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$$
On obtient donc :
$$u_{n+1} = \left(\left\lfloor \log_2\left((n+1)\ \mathrm{div}\ 2\right) \right\rfloor + 1\right) + 1 = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1$$

Dans les deux cas, on obtient $u_{n+1} = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1$ et $P(n+1)$ est vraie. On peut donc déduire $P(n+1)$ de $\wedge_{i=1}^{n} P(i)$ et l'hérédité forte est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*(n \geq 1)$.

Conclusion :

$P(1)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*(n \geq 1)$, l'hérédité forte est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a bien $u_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

12) Montrer que les deux caractérisations données pour S à la question 5 sont tautologiquement équivalentes.

Pour démontrer la tautologie suivante :

$$\left(\forall i, (\ i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\right) \equiv \left(\forall (i,j), \left(\left((i,j) \in \mathbb{N}^2\right) \wedge (i < j)\right) \rightarrow \left(s_i \leq s_j\right)\right),$$

on peut procéder en deux temps et démontrer que les deux implications suivantes sont des tautologies :

a) $\Big(\forall(i,j), \big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)\Big) \rightarrow \big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big)$

b) $\big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big) \rightarrow \Big(\forall(i,j), \big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)\Big)$

L'implication a) est toujours vérifiée : il suffit de remarquer que, si le prédicat $s_i \leq s_j$ est vrai pour tout $j > i$, alors il est vrai en particulier pour $j = i + 1$.

L'implication b) est plus délicate à traiter. On peut cependant remarquer que l'on peut toujours remplacer tout entier *j* avec $j > i$, où i est aussi un entier, par $i + n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

c) $\Big(\forall(i,j), \big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)\Big) \equiv \Big(\forall(i,n), \big((i,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\big) \rightarrow (s_i \leq s_{i+n})\Big)$.

On peut alors résoudre la question en utilisant une récurrence sur n. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$P(n) : \big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+n})\big)$$

Initialisation :

$P(1)$ correspond exactement au membre gauche de b) : $\big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big)$. $P(1)$ est donc vraie.

Hérédité :

Il faut montrer que $\forall n, (n \in \mathbb{N}^*) \rightarrow \big(P(n) \vDash P(n+1)\big)$ (hérédité simple).

On précise ce que signifie $P(n+1)$:

$$P(n+1) : \Big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow \big(s_i \leq s_{i+(n+1)}\big)\Big).$$

Comme $n + 1 \geq 2$, on peut appliquer l'hypothèse d'hérédité $P(n)$ et on a : $s_i \leq s_{i+n}$, d'autre part, comme $P(1)$ est vraie on a $s_{i+n} \leq s_{(i+n)+1} = s_{i+(n+1)}$. On obtient : $s_i \leq s_{i+n} \leq s_{i+(n+1)}$, ce qui donne par transitivité : $s_i \leq s_{i+(n+1)}$ qui est bien $P(n+1)$.

Donc on peut effectivement déduire $P(n+1)$ de $P(n)$ et l'hérédité est vérifiée.

Conclusion :

$P(1)$ est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'hérédité simple est vérifiée, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc on a bien : $\big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big) \vDash \Big(\forall(i,n), \big((i,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*\big) \rightarrow (s_i \leq s_{i+n})\Big)$.

D'après c) on obtient :

$$\big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big) \vDash \Big(\forall(i,j), \big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)\Big)$$

et b) est donc bien une tautologie.

Puisque a) et b) sont des tautologies on a bien :

$$\big(\forall i, (\, i \in \mathbb{N}) \rightarrow (s_i \leq s_{i+1})\big) \equiv \Big(\forall(i,j), \big(\big((i,j) \in \mathbb{N}^2\big) \wedge (i < j)\big) \rightarrow \big(s_i \leq s_j\big)\Big)$$

et les deux caractérisations données pour S à la question 5 sont bien tautologiquement équivalentes.