Université de Picardie Jules Verne
Outils Mathématiques L2-S3
Année 2021-2022

Outils Mathématiques - Claire Meyer

Examen du 3 janvier 2022

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. L'épreuve dure 1h30.

Exercice 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$, on considère une ellipse E de demi-grand axe a et de demi-petit axe b centrée sur l'origine O. Le grand axe de l'ellipse est supposé porté par $(x'x)$. Faire une figure.
1) Calculer l'aire A de l'ellipse directement en fixant x.
2) Calculer l'aire A de l'ellipse en faisant un changement de variables.
3) Calculer l'aire A de l'ellipse en appliquant la formule de Green-Riemann.

Exercice 2 : On considère l'intégrale triple $B = \int\int\int_D \exp\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right) dxdydz$ où D désigne l'ellipsoïde de centre O et de demi-axes respectifs a, b et c.
Calculer B ; on pourra effectuer un (ou plusieurs) changement(s) de variables.

Exercice 3 : On considère $J = \int\int\int_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où D désigne le domaine de l'espace limité par le cône d'équation : $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et les plans d'équations : $z = 0$ et $z = 1$.
1) Calculer J en passant en coordonnées cylindriques.
2) Calculer J en passant en coordonnées sphériques.

Exercice 4 : On considère l'astroïde C représenté sur la Figure 1 dont les équations paramétriques sont données par : $\begin{cases} x = 4a\cos^3 t \\ y = 4a\sin^3 t \end{cases}$ où a désigne une constante positive.

1) Calculer le périmètre L de l'astroïde en fonction de a. On calculera $L = \int_{C+} dl$ où dl représente un petit élément de courbe et C_+ la courbe C orientée dans le sens trigonométrique.
2) Calculer l'aire A de l'astroïde.

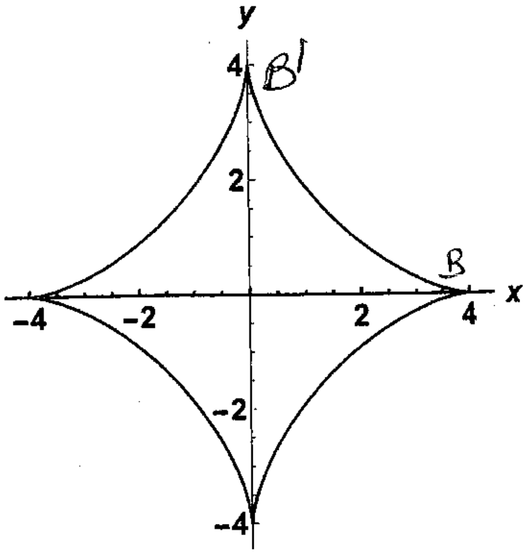

FIGURE 1. Représentation d'un astroide ; $a = 1$ uniquement pour la figure

Exercice 5 : Calculer l'aire R de la région délimitée par la cardioïde d'équation $r = 2 + 2\cos\theta$ et à l'extérieur du cercle d'équation $r = 3$.

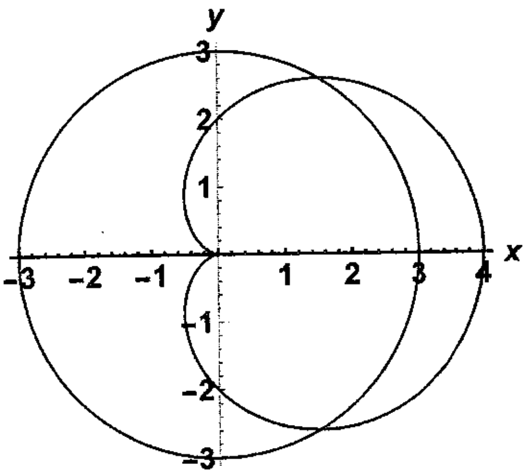

FIGURE 2. Représentation des deux courbes : cardioïde et cercle

Exercice 6 : Calculer l'intégrale de surface de la fonction vectorielle $\overrightarrow{G}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ sur la surface Σ définie par : $\begin{pmatrix} x = \cos v \\ y = \sin v \\ z = u \end{pmatrix}$ avec $0 \le u \le 2$ et $\frac{\pi}{2} \le v \le \pi$.

Examen d'électrostatique (janvier 2022)
Licence 2ème année

Exercice I :

On considère une sphère pleine de centre O, de rayon R et chargée avec une densité volumique de charge ρ

a) Calculer la charge Q portée par la sphère en fonction de ρ et R.

b) A l'aide de la symétrie du système, vous déterminerez l'orientation de $\vec{E}$, les variables dont il dépend, puis son expression à l'aide du théorème de Gauss à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

Exercice II:

On considère un cylindre plein d'axe Oz, de rayon R, de hauteur h infinie et chargé avec une densité volumique de charge ρ

a) Calculer la charge Q portée par le cylindre en fonction de ρ, R et h.

b) A l'aide de la symétrie du système, vous déterminerez l'orientation de $\vec{E}$, les variables dont il dépend, puis son expression à l'aide du théorème de Gauss à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

c) Si le cylindre avait été fait d'un métal conducteur, quelle aurait été l'expression du champ $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur en fonction de Q (la calculer) ?

Exercice III :

Un fil de cuivre conducteur, plein, cylindrique, d'axe Oz, de hauteur h infinie, de rayon R_1, contient une bulle d'air de forme sphérique, de centre O et de rayon R_2.

Ce système porte une charge Q.

1) Calculer le champ $\vec{E}$ créé, à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

Université de Picardie Jules Verne **Année : 2021-2022**
Licence de Physique et de Chimie (tous parcours) *Semestre 3*

Examen final
Méthodes numériques 1
Durée : 1 Heure 30

Exercice 1 (4 points)

Indiquer pour chacune des opérations suivantes, le résultat final donné par Matlab à la fin de chaque ligne :

a) A=[-6 5 ; 3 0 ; 2 7] ; B=[A [1 ;2 ;3]]

b) C=[2 3 4 6 8; 0 4 7 6 -1; 2 -9 6 3 1 ; -5 8 -3 2 4; 2 0 1 0 7]

c) D=C(1 , :); E=C(1: 3 , 5) ; F=C(3,4) ; G=C(2:4 , 3:5) ; H=C'

Exercice 2 (8 points)

Transcrire ces séquences en **langage Matlab viable** :

a) Soit *t* allant de 0 à 10 par pas de 0,01 , $y(t)=3\sin(\pi t)$. Tracez *y* en fonction de *t* en rouge.

b) Demandez à l'utilisateur d'entrer un entier *n*. Calculer la suite $u_i=2u_{i-1}+5$ jusqu'à n sachant que $u_0=0$. Retourner la valeur de u_n .

c) Demandez l'âge à l'utilisateur. Si son âge est inférieur à 18 ans retournez : Vous êtes junior. Si il est compris entre 18 et 50 ans retournez : Vous êtes sénior. Si il est supérieur à 50 ans retournez : Vous êtes vétéran.

d) Calculez $y=3x^3-6x^2+2x+3$ pour 50 valeurs de *x* comprises entre -5 et 8. Tracez les 30 premiers points de la courbe *y(x)*. Nommez vos axes et donnez un titre à votre courbe.

Exercice 3 (8 points)

En mathématiques, la factorielle d'un entier naturel *n*, noté *n*!, est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à *n*. Et par définition 0!=1.

a) Ecrire l'algorithme permettant de calculer *n*! .

b) dessiner l'organigramme correspondant.

c) Ecrire une **fonction Matlab** permettant de calculer *n*!