Bilan

Alain Cournier

Université de Picardie

Licence Informatique

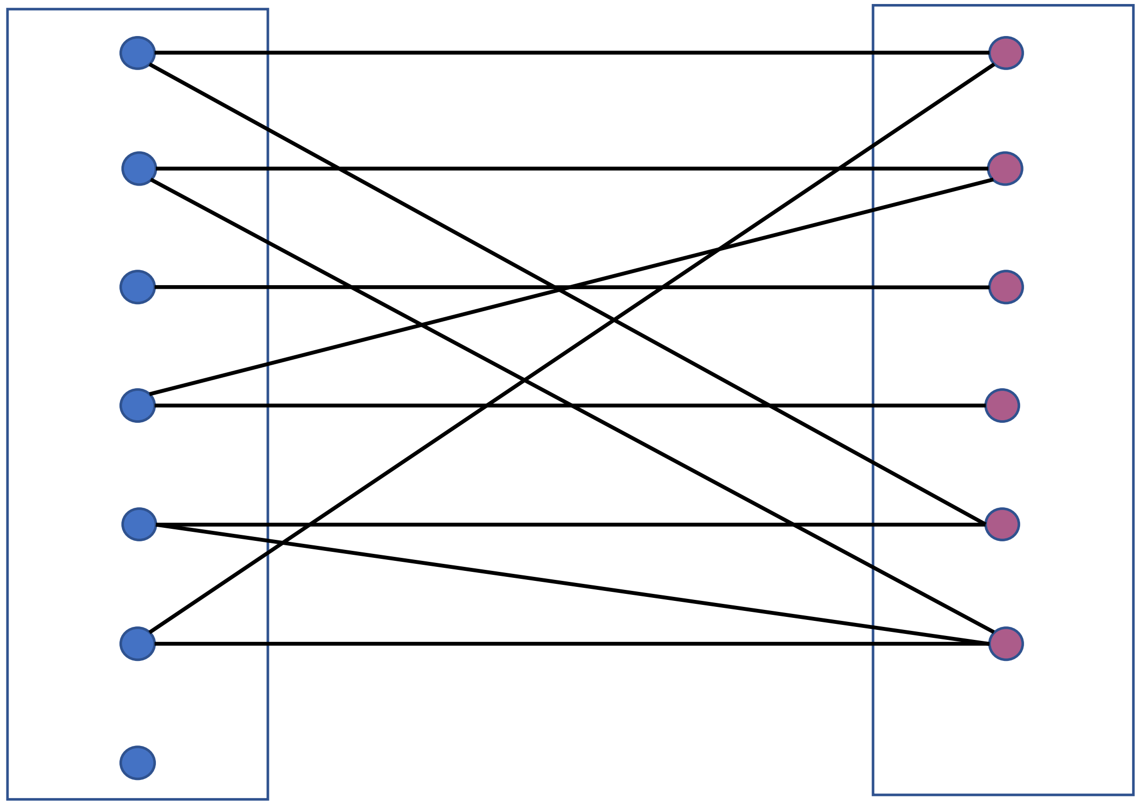
Un exemple de problème

- Un ensemble de filles Fi = $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_l\}$
- Un ensemble de garçons Ga = $\{g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n\}$
- Pour le bal de fin d'année on souhaite constituer un maximum de couples (garçon, fille) pour la valse d'ouverture aussi :
  - Chaque fille f_i a rédigé un document df_i sur lequel elle a écrit le nom de chaque garçon avec qui elle accepte de danser.
  - Chaque garçon g_j a rédigé un document dg_j sur lequel il a écrit le nom de chaque fille avec qui il accepte de danser.
- Pour constituer le couple (g_a, f_b) il faut que $g_a \in df_b$ et $f_b \in dg_a$.

Rappel des évidences

- Une fille sera dans au plus un couple (aucune fille ne danse avec plusieurs garçons)
- Un garçon sera dans au plus un couple (aucun garçon ne danse avec plusieurs filles)

Modélisons



L'arête uv est présente dans notre graphe si et seulement si uv est un couple possible

Comment reformuler le problème

- Un couple = Une arête
- Un ensemble de couples C = Un ensemble d’arêtes A
- Constituer un nombre maximal de couple = construire un ensemble d’arêtes A de cardinal maximal.

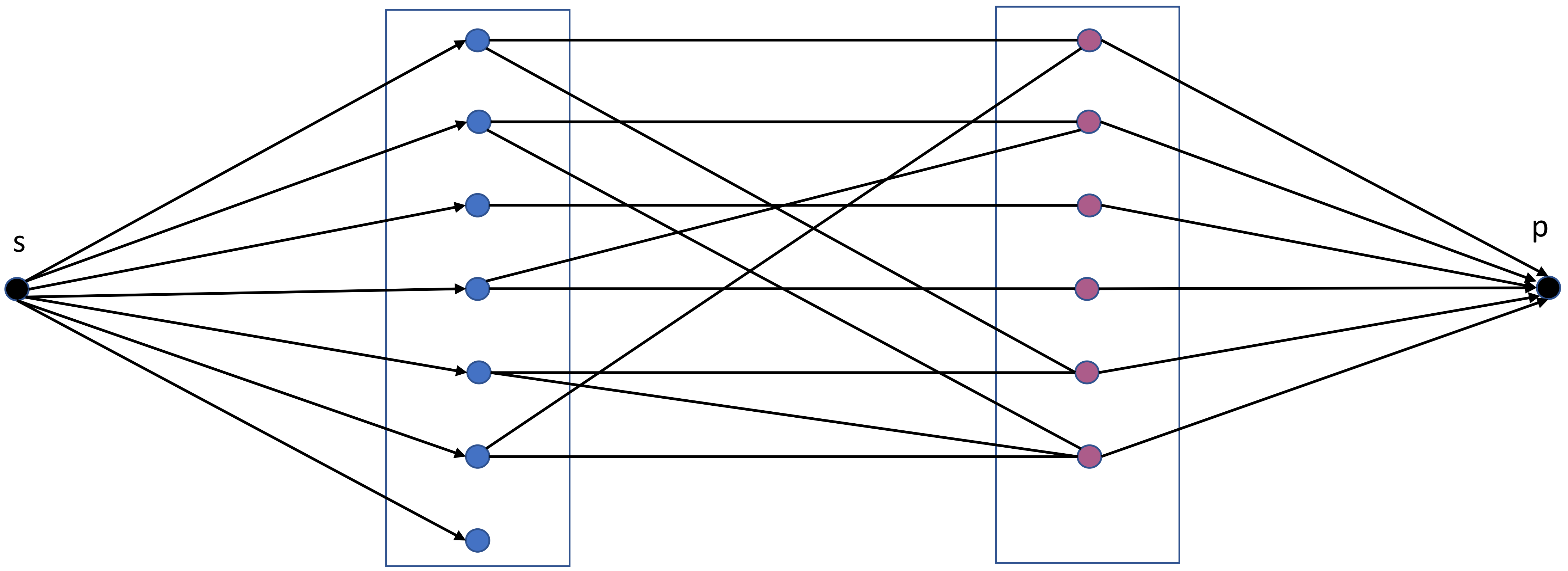
Comment reformuler le problème

- Il existe au plus un couple de C contenant la fille f_i et il existe au plus un couple de C contenant le garçon g_j. Conséquence si xy et zt sont deux arêtes de A alors $\{x, y\} \cap \{z, t\} = \emptyset$. On parle d'arêtes indépendantes.
- Ce problème académique s'appelle la recherche d'un couplage max dans un graphe biparti.

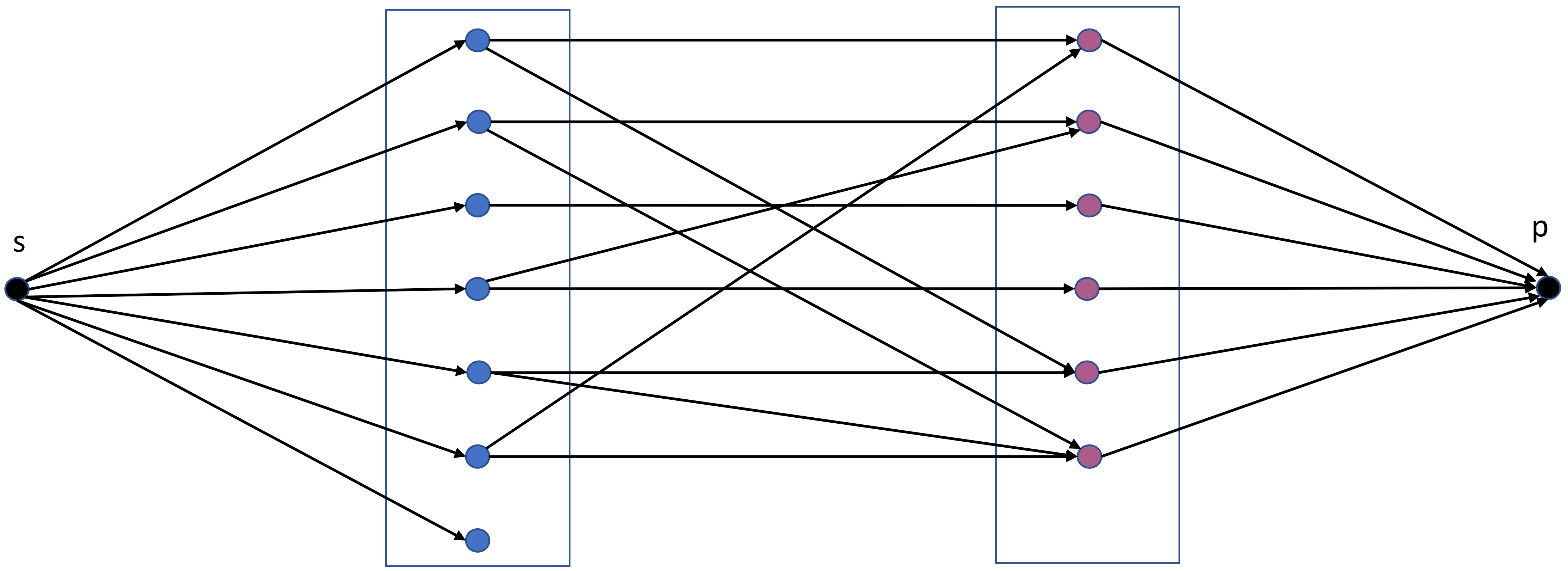
Comment résoudre ?

- Nous allons retravailler ce graphe pour obtenir un graphe de flots.

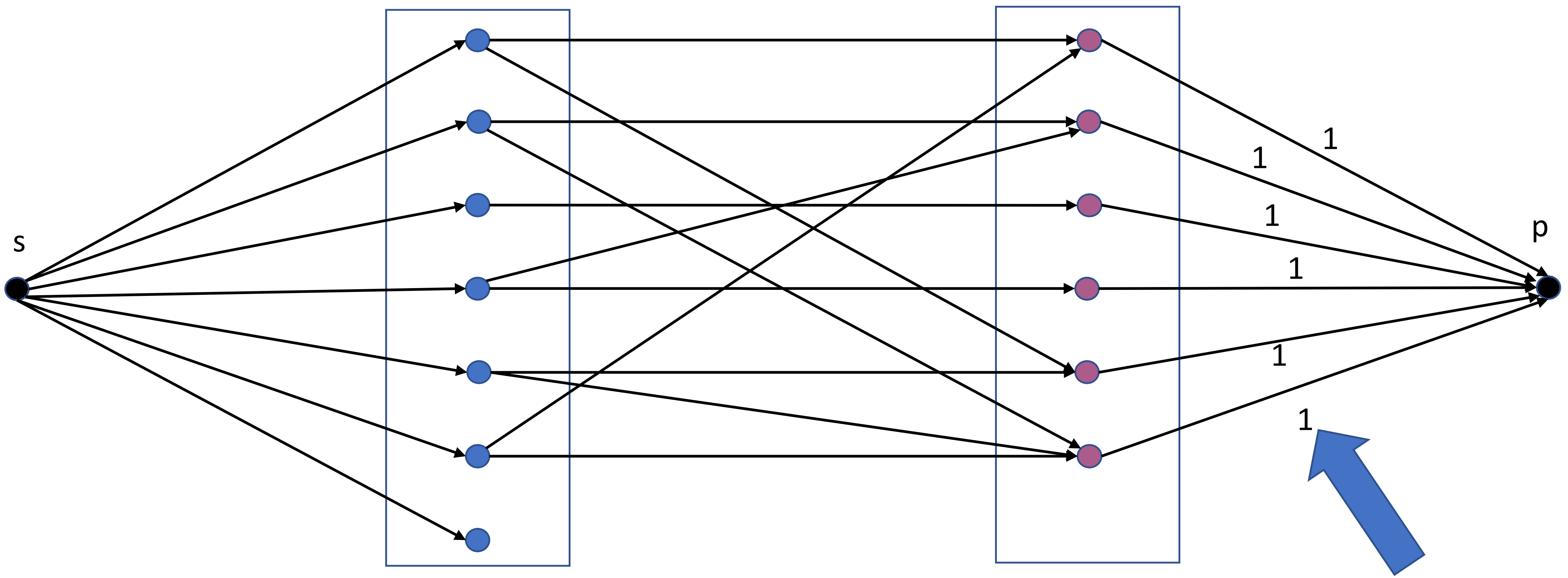
Modélisons en flot : une source et un puit



Modélisons en flot : antisymétrique

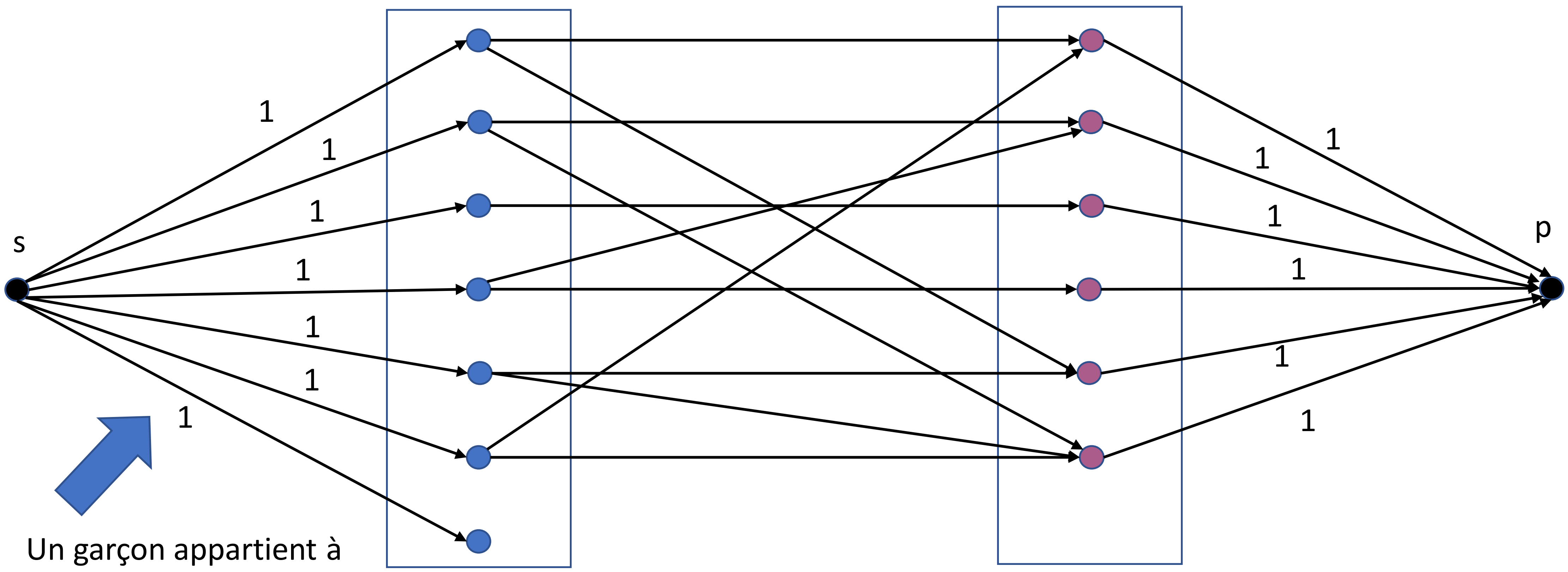


Modélisons en flot : les capacités



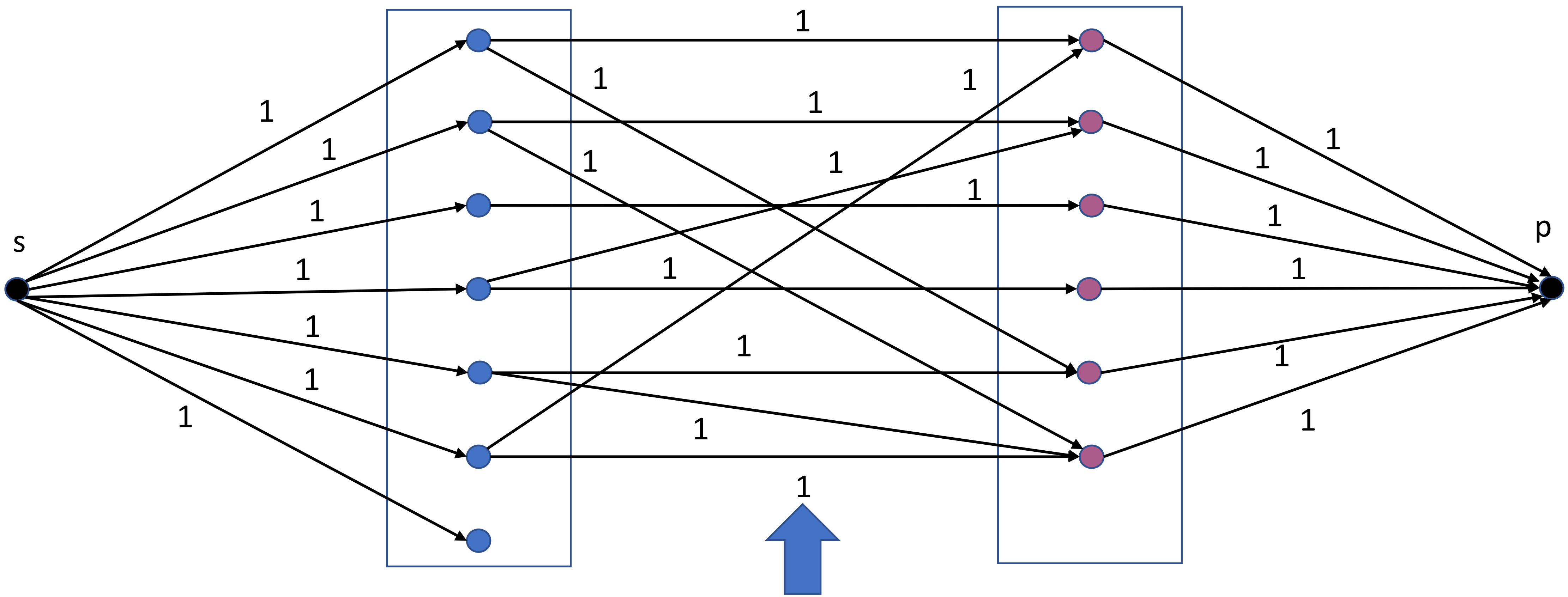
Une fille appartient à
1 couple au maximum

Modélisons en flot : les capacités



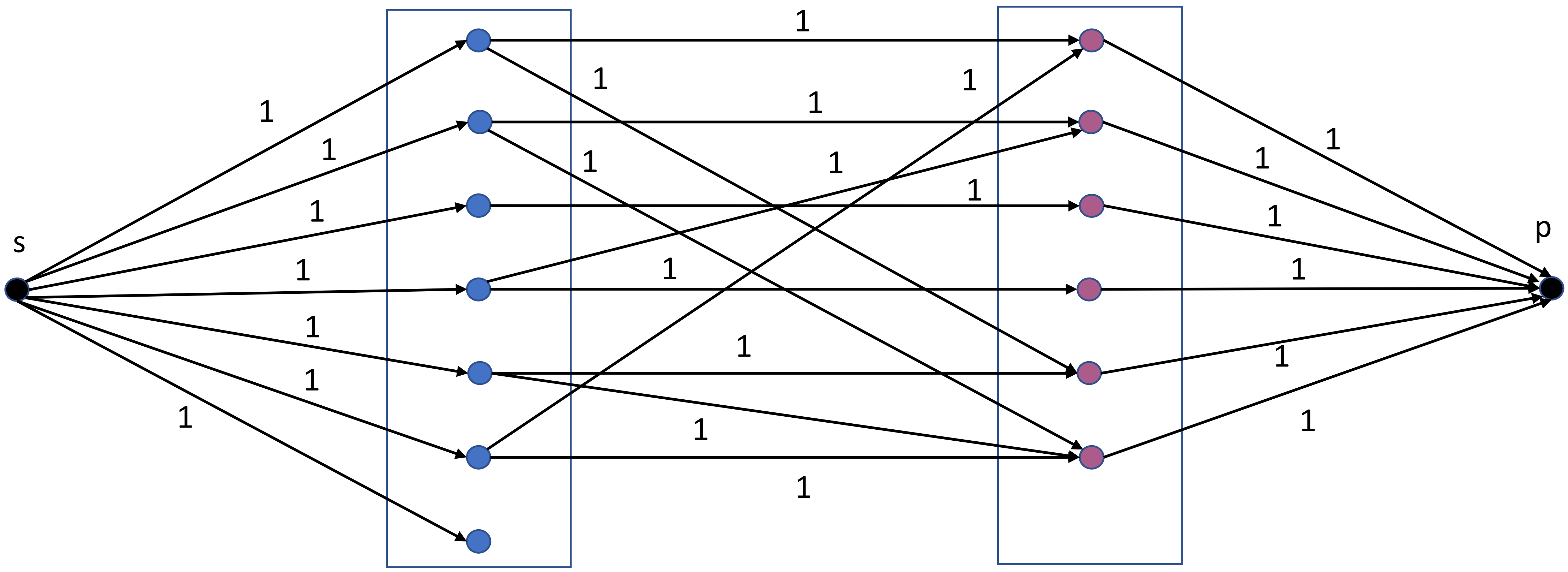
Un garçon appartient à
1 couple au maximum

Modélisons en flot : les capacités

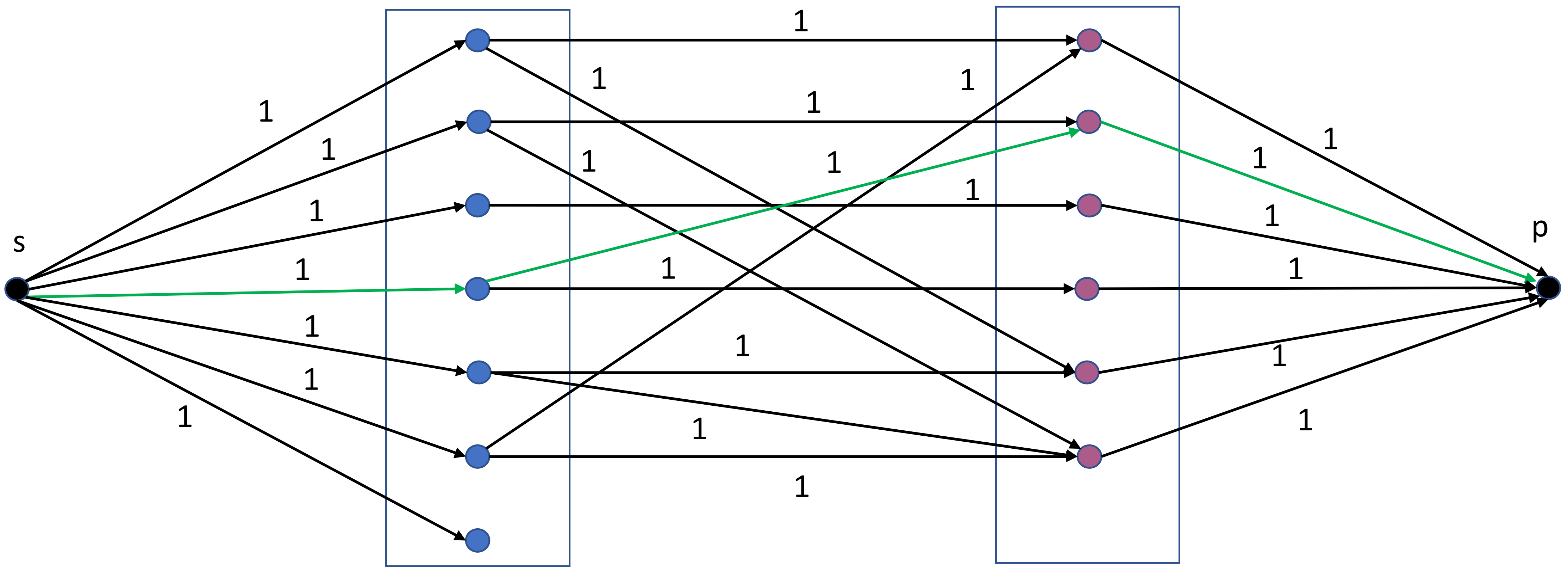


Un arc = 1 couple

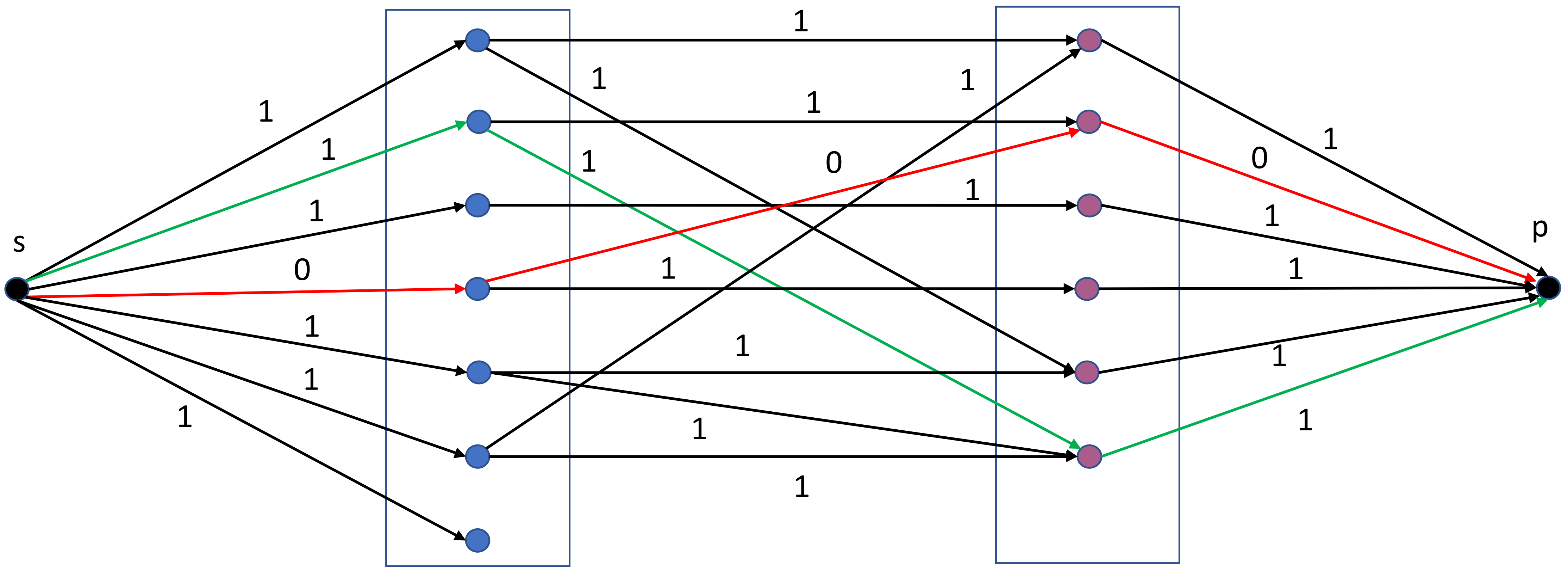
Calcul du flot maximal



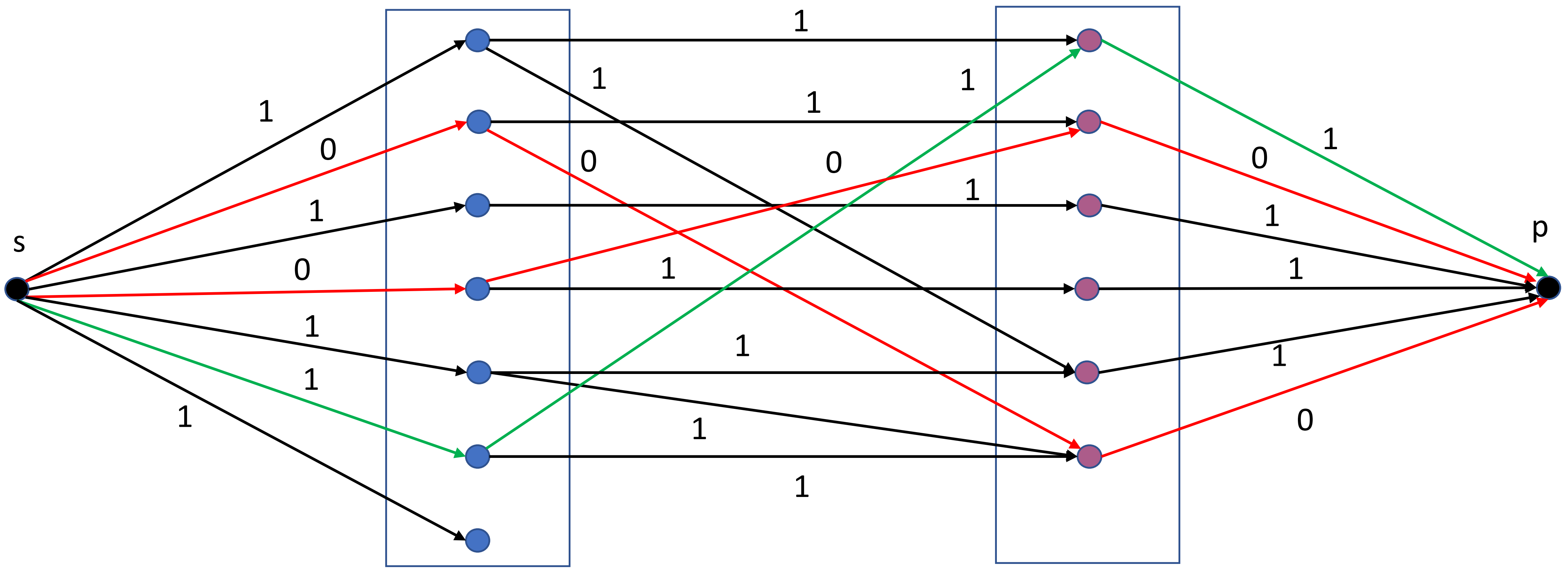
Calcul du flot maximal



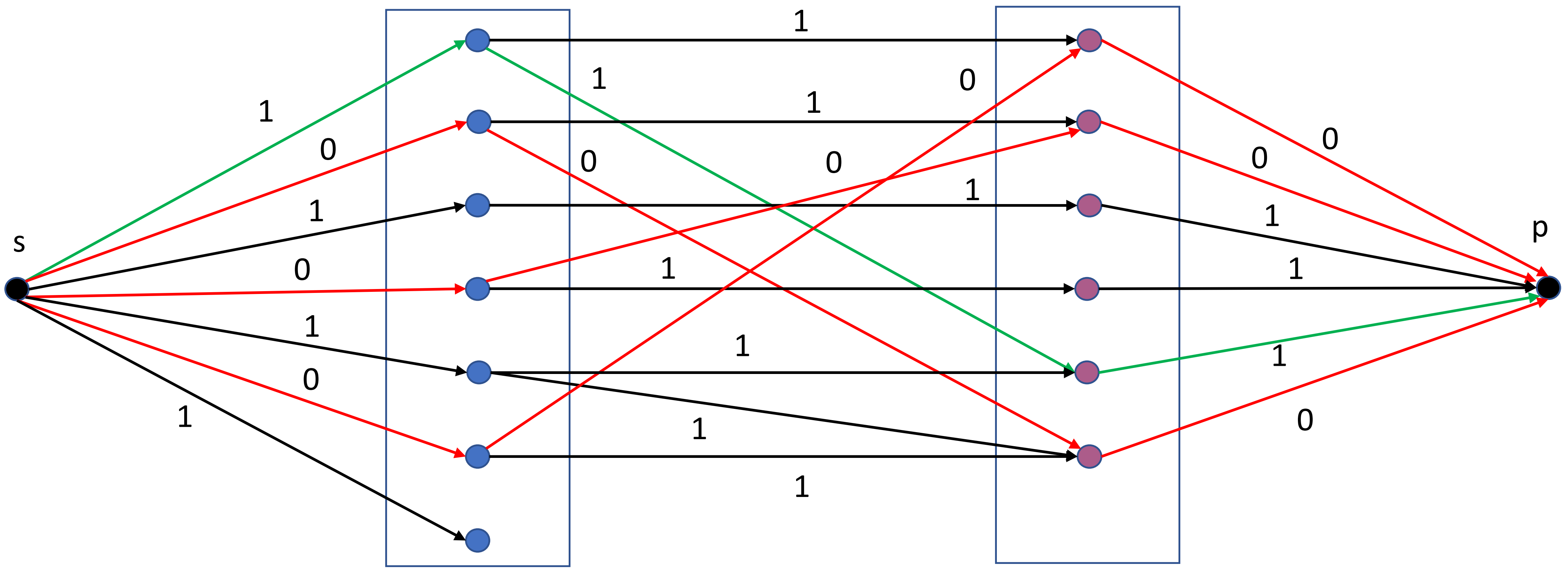
Calcul du flot maximal



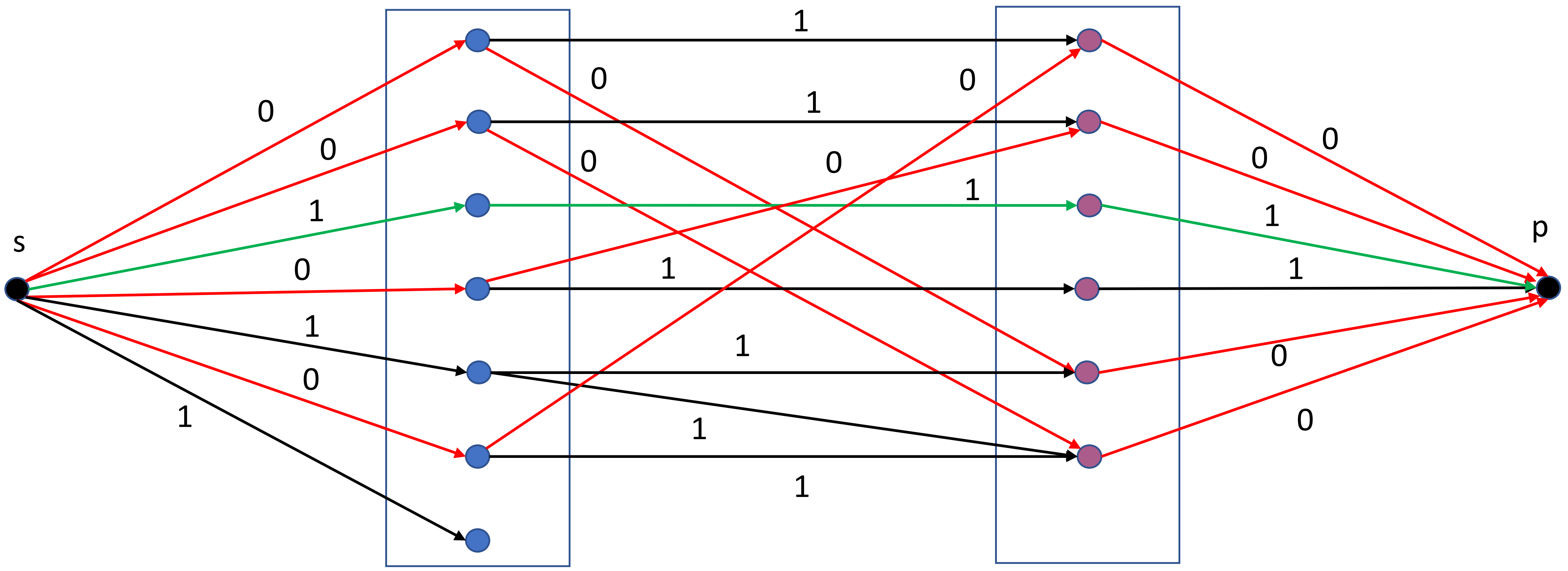
Calcul du flot maximal



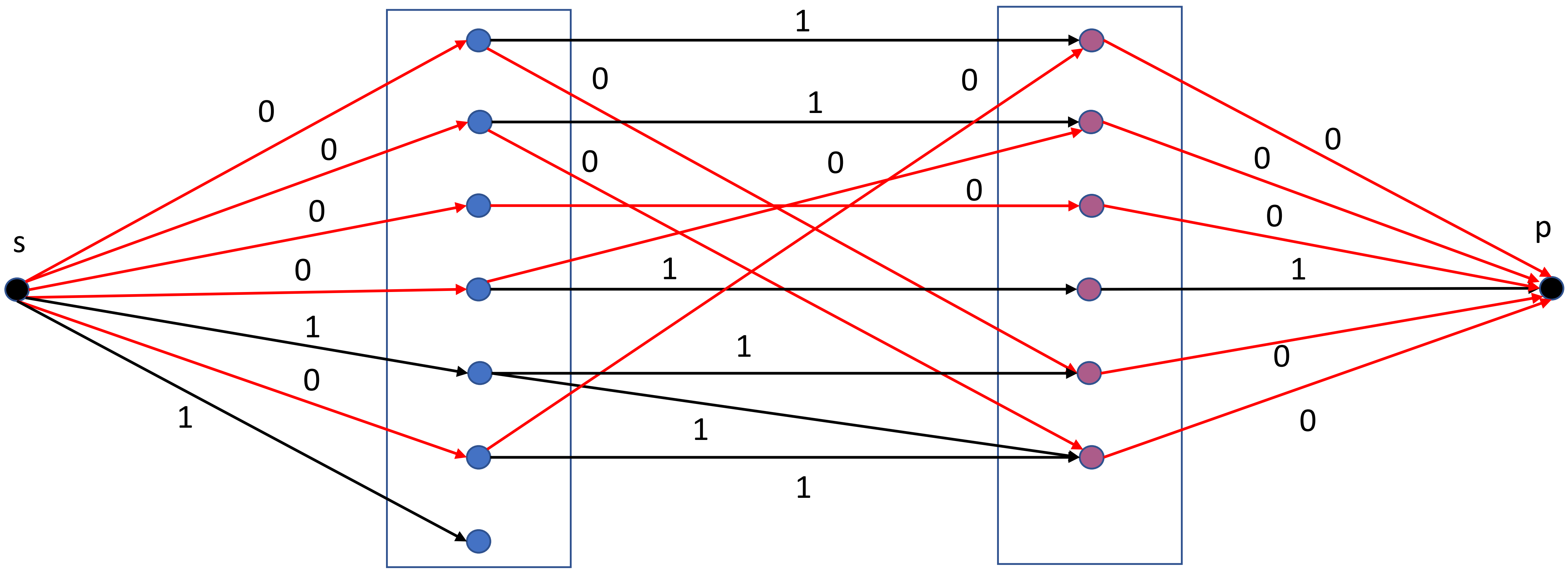
Calcul du flot maximal



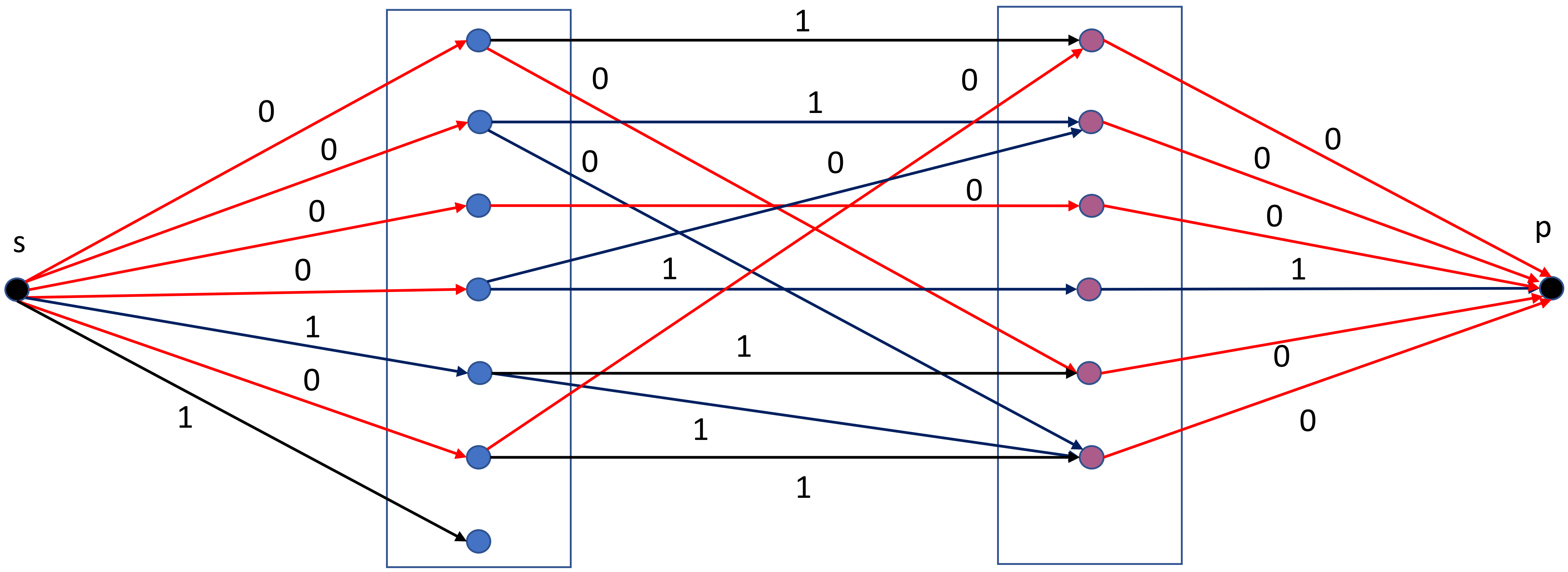
Calcul du flot maximal



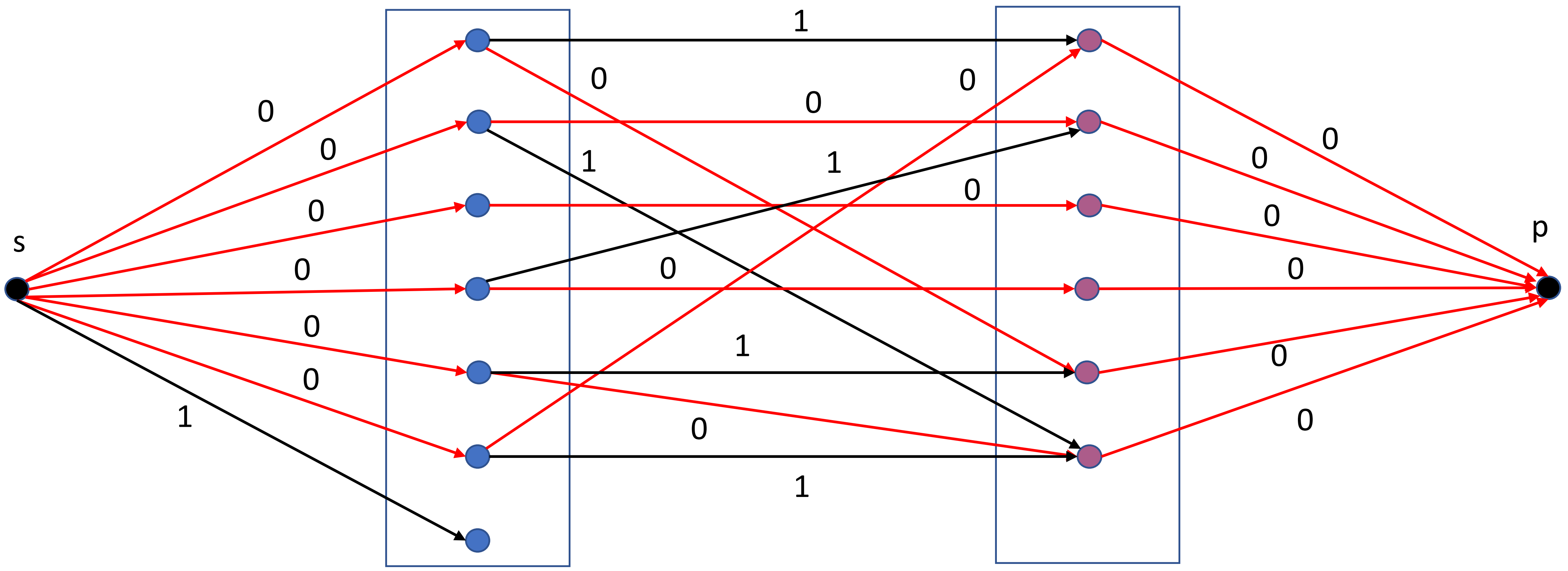
Calcul du flot maximal : Fini ?



Calcul du flot maximal : Fini ? Non



Calcul du flot maximal : Fini ? Non



Conclusion

- Le calcul du flot maximal donne le résultat de notre problème initial.

Problème du facteur

- Données :
  - Une carte routière
  - Un ensemble $E=\{o_1,o_2,\dots,o_k\}$ d'objets à distribuer
- Question : Trouver un ordre sur les objets minimisant la distance parcourue lors de la tournée.

Première étape

- Calculer pour chaque couple d'objet (o_i, o_j) la distance $d(o_i, o_j)$ qui sépare sur la carte C leurs lieux de distribution.
  - Algorithme du plus court chemin

Le problème

- On souhaite résoudre le problème du facteur (recherche du cycle hamiltonien de poids minimal) dans un graphe :
  - Non orienté
  - Complet
  - Ne possédant que des pondérations positives
  - respectant l'inégalité triangulaire.

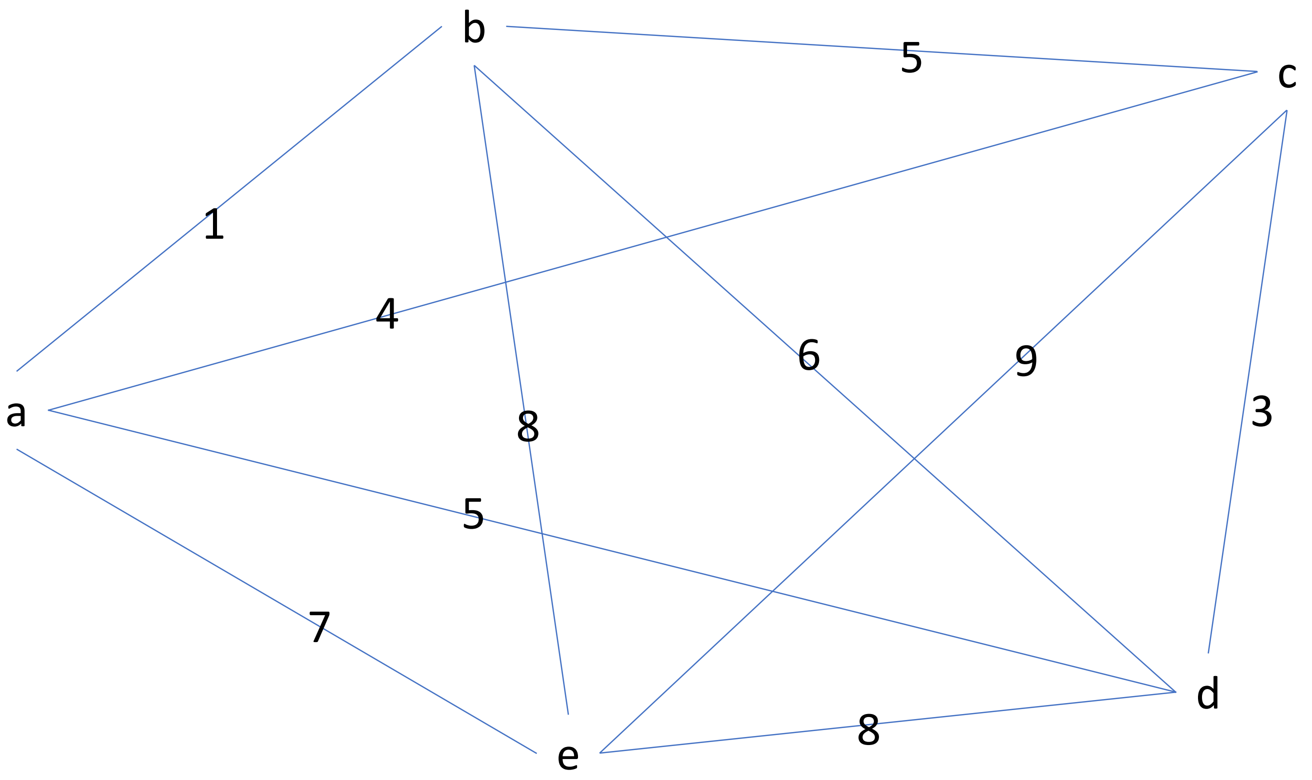
- Rappel sur l'inégalité triangulaire : pour tout triplet de sommet (x,y,z), $v(x,y)+v(y,z) \geq v(x,z)$

Problème difficile à résoudre

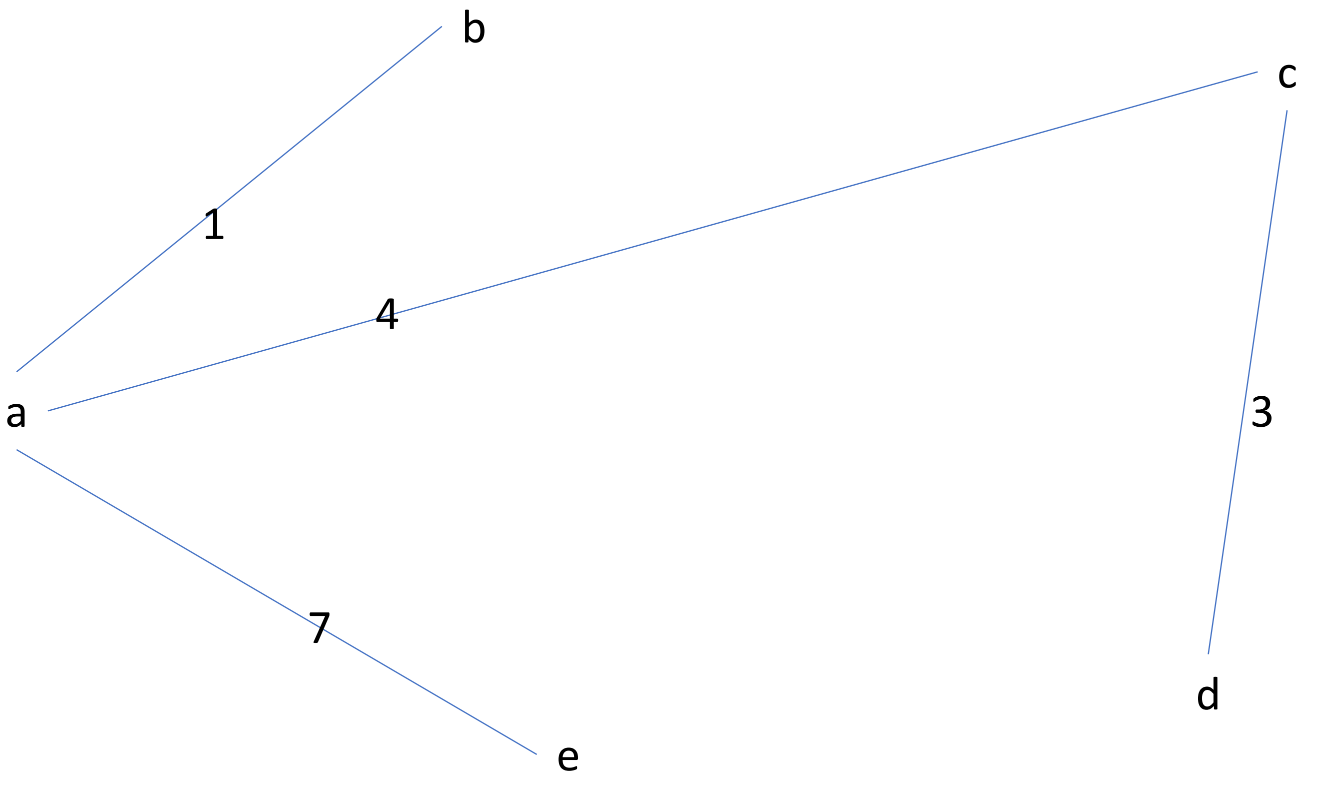
- Ce problème fait partie des problème pour lesquels on ne connait pas de méthode de résolution rapide.
- Par contre nous pouvons calculer une solution approchée.

Exemple d’approximation : l’algorithme A

1. Pour un Graphe G
2. Calculer Ar(G), un arbre couvrant de poids minimal de G
3. Calculer P une permutation des sommets obtenue par un parcours pré ordre de notre arbre Ar(G).
    1. Puisque G est complet P est un cycle hamiltonien
4. Proposer P comme solution

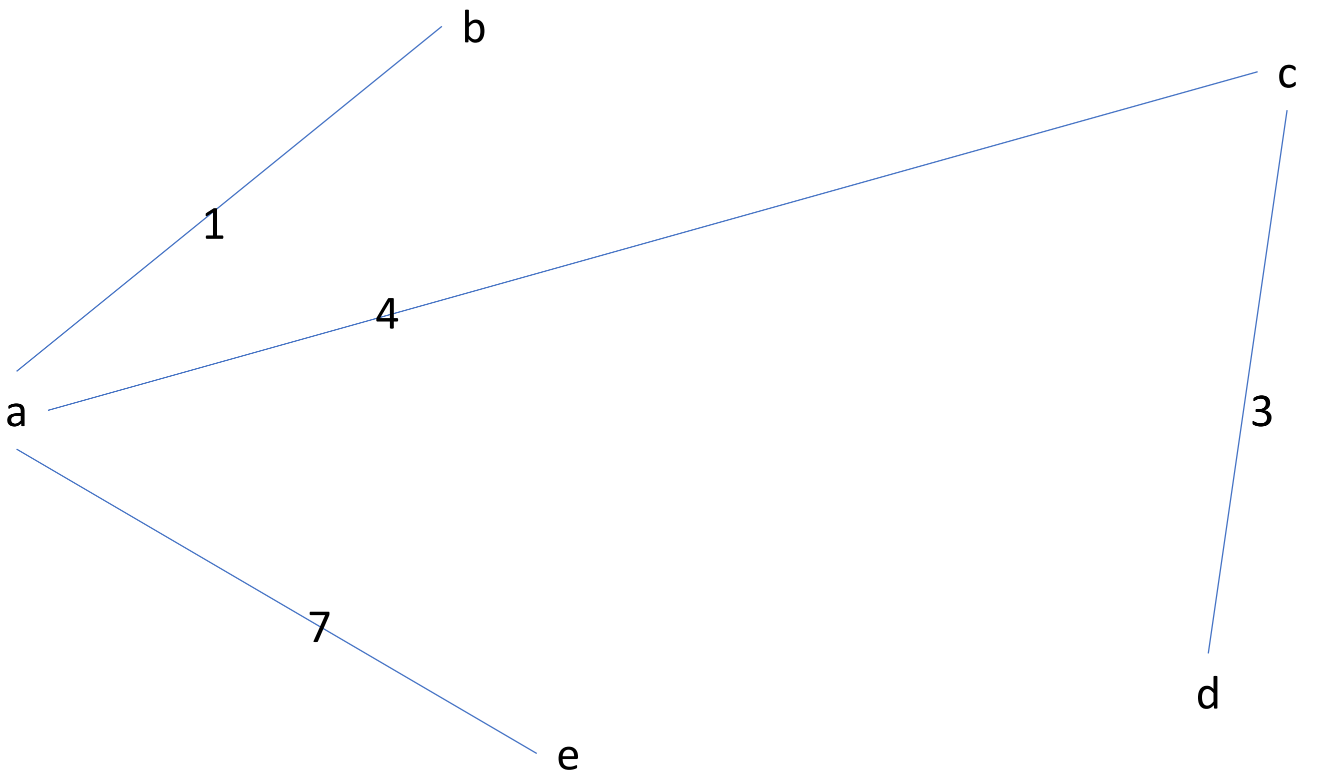

b
c
a
d
e
5
1
4
8
6
9
3
5
7
8

Proposition : aecdba



Proposition : aecdba

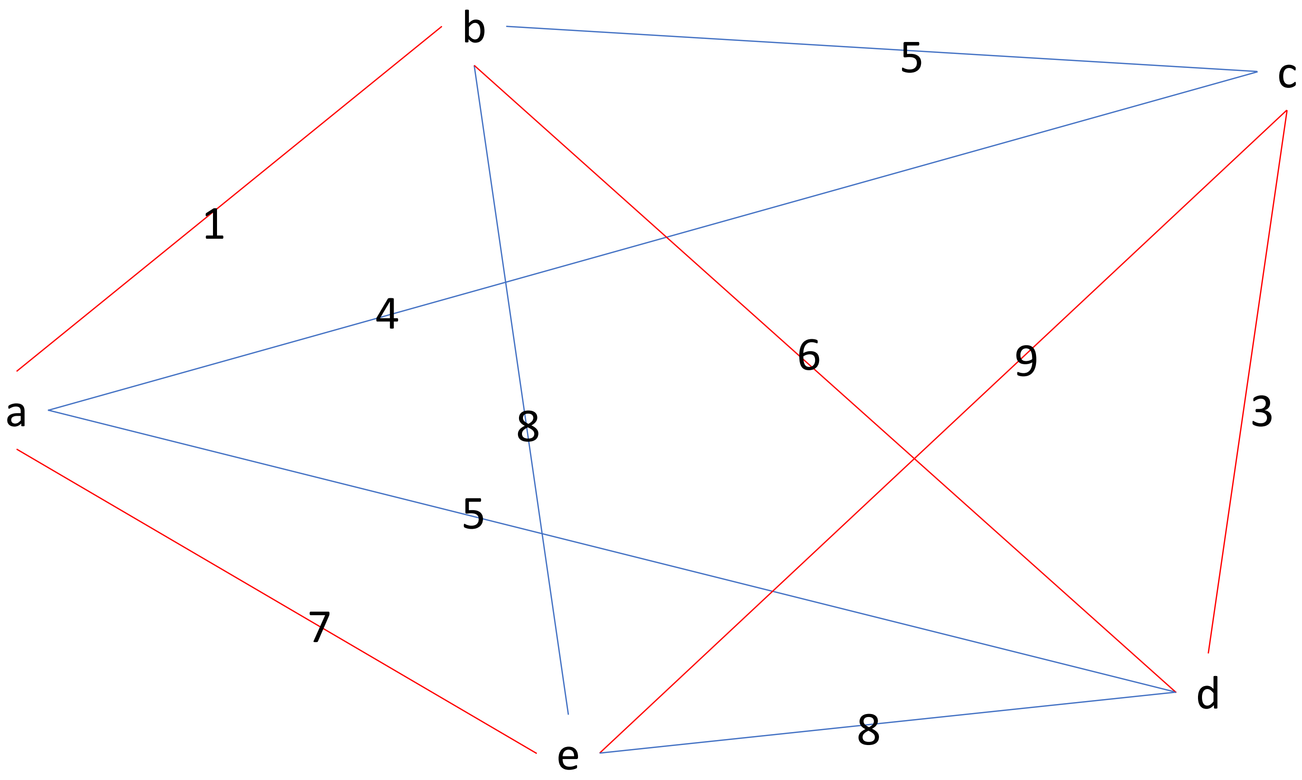
Poids Arbre : 15



Proposition : aecdba

Poids Arbre : 15

Poids de la solution 26



Exemple d’approximation : Qualité de la Sol

- Pour une donnée D appelons SolOpt(D) la solution optimale du problème, SolA(D) la solution proposée par notre algorithme et PoidsAr(D) le poids de l’arbre couvrant de poids minimal. On remarque que
  - Poids(SolOpt(D)) ≥ PoidsAr(D)
  - 2*PoidsAr(D) ≥ Poids(SolA(D))

- 2* Poids(SolOpt(D)) ≥ 2*PoidsAr(D) ≥ Poids(SolA(D))
- C’est un algorithme d’approximation avec un facteur 2.

Problème du centre de distribution v1

- Données
  - Une carte routière
  - Un ensemble $E=\{o_1,o_2,\ldots,o_k\}$ d'objets à distribuer
  - NbT un entier naturel
  - Ecart : entier
- Comment répartir les k objets en NbT tournées T_1, T_2, …, T_{Nbt} de telle sorte que pour tout couple de tournées (T_i, T_j),

$$|\text{Coût}(T_i) - \text{Coût}(T_j)| < \text{Ecart}$$

Problème du centre de distribution v2

- Données
  - Une carte routière
  - Un ensemble $E=\{o_1,o_2,\ldots,o_k\}$ d'objets à distribuer
  - NbT un entier naturel
  - CoûtMax : nombre
- Peut-on répartir les k objets en NbT tournées $T_1, T_2, \ldots, T_{Nbt}$ de telle sorte que pour toute tournée T_i, $Coût(T_i) < CoûtMax$?