Exercice 10. FND

$$\neg(a \Leftrightarrow b) \vee (b \wedge c) \Rightarrow c$$

$$\neg((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)) \vee (b \wedge c) \Rightarrow c$$

$$\neg(\neg((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)) \vee (b \wedge c)) \vee c$$

$$((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge \neg(b \wedge c)) \vee c$$

$$((\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg c)) \vee c$$

$$(((\underbrace{\neg a \wedge a}_{0}) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee (\underbrace{b \wedge \neg b}_{0})) \wedge (\neg b \vee \neg c)) \vee c$$

$$(((\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a)) \wedge (\neg b \vee \neg c)) \vee c$$

$$((\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee c) \wedge \underbrace{(\neg b \vee \underbrace{\neg c \vee c}_{1})}_{1}$$

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee c$$

Satisfaisable

parce que $a=1,\ b=1,\ c=0$ est un modèle aussi

$a=1,\ b=1,\ c=1$ " " " "

$a=0,\ b=0,\ c=0$ " " " "

⋮

etc

Exercice 10) FND

$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \neg a) \wedge (\neg a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg a) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$

$((\neg a \wedge \neg b) \vee \underbrace{(\neg a \wedge \neg a)} \vee \underbrace{(b \wedge \neg b)}_{0} \vee (b \wedge \neg a)) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$

$\underbrace{(\neg a \wedge \neg b) \vee \neg a}$

$(\ \neg a \qquad \vee (b \wedge \neg a)) \wedge ((a \wedge \neg b) \vee \underbrace{(a \wedge a)}_{a} \vee \underbrace{(b \wedge \neg b)}_{0} \vee (b \wedge a))$

$\underbrace{(a \wedge \neg b) \vee a}_{a} \vee (b \wedge a)$

$\neg a \qquad \underbrace{a \vee (b \wedge a)}$

a

$\neg a \quad \wedge \quad a$

Lois de simplification

$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$

$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$

$X \vee (\neg X \wedge Y) \equiv X \vee Y$

$X \wedge (\neg X \vee Y) \equiv X \wedge Y$

$(\neg a \wedge a) \equiv 0$

La formule est en fait non-satisfaisable.

Exercice 11. FNC

$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$(\neg(p \vee (q\wedge r)) \vee ((p\vee q)\wedge(p\vee r))) \wedge ((p \vee (q\wedge r)) \vee \neg((p\vee q)\wedge(p\vee r)))$$

$$((\neg p \wedge \neg(q\wedge r)) \vee ((p\vee q)\wedge(p\vee r))) \wedge ((p\vee(q\wedge r)) \vee (\neg(p\vee q) \vee \neg(p\vee r)))$$

$$((\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee ((p\vee q)\wedge(p\vee r))) \wedge ((p\vee(q\wedge r)) \vee ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge \neg r)))$$

$$(((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)) \vee ((p\vee q)\wedge(p\vee r))) \wedge (((p\vee q)\wedge(p\vee r)) \vee ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)))$$

$$(((\underbrace{\neg p\vee\neg p}_{\neg p})\wedge(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg r)) \vee \underbrace{((p\vee q)\wedge(p\vee r))}) \wedge (((p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)))$$

$$((\underbrace{\neg p\vee p\vee q}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg p\vee p\vee r}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg p\vee\neg r\vee p\vee q}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg p\vee\neg r\vee p\vee r}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg q\vee\neg p\vee p\vee q}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg q\vee\neg p\vee p\vee r}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg q\vee\neg r\vee p\vee q}_{\top})\wedge(\underbrace{\neg q\vee\neg r\vee p\vee r}_{\top}))$$

$$\top \wedge (((p\vee q)\wedge(p\vee r)) \vee \underbrace{((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r))})$$

$$((\underbrace{\neg p\vee\neg p}_{\neg p})\wedge(\neg p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg r))$$

$$\neg p \quad \wedge \quad \wedge$$

$$\neg p \quad \wedge$$

$$\top \wedge ((p\vee q)\wedge(p\vee r) \quad \vee \quad (\neg p \quad \wedge(\neg q\vee\neg r))$$

$$\top\wedge(\underbrace{p\vee q\vee\neg p}_{\top})\wedge(\underbrace{p\vee q\vee\neg q\vee\neg r}_{\top})\wedge(\underbrace{p\vee r\vee\neg p}_{\top})\wedge(\underbrace{p\vee r\vee\neg q\vee\neg r}_{\top}) \equiv \top$$

A est valide.

Exercice 11 Alternative:

Pour montrer que la formule est valide. (si FNC n'était pas demandé)

on peut aussi faire

$$A := \underbrace{p \vee (q \wedge r)} \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$$

Ça c'est toujours vrai $(a \Leftrightarrow a)$

alors la formule A est valide.
est une tautologie.